

## 10 клас

1. Розглянемо чотирицифрове число, а також чотирицифрове число, що записане такими самими цифрами у зворотному порядку. Яку найбільшу кількість цифр 5 може мати у своєму десятковому запису модуль різниці таких чисел?
2. Розв'яжіть рівняння:

$$(x+1)^5 + (x+1)^4(x-1) + (x+1)^3(x-1)^2 + (x+1)^2(x-1)^3 + (x+1)(x-1)^4 + (x-1)^5 = 0.$$

3. Всередині квадрата  $ABCD$  вибрано точку  $O$ . Квадрат  $A'B'C'D'$  – образ квадрата  $ABCD$  при гомотетії з центром у точці  $O$  та коефіцієнтом  $k > 1$  (точки  $A', B', C', D'$  є образами точок  $A, B, C, D$  відповідно). Доведіть, що сума площ чотирикутників  $A'ABB'$  та  $C'CDD'$  дорівнює сумі площ чотирикутників  $B'BCC'$  та  $D'DAA'$ .
4. Невід'ємні числа  $a, b, c$  задовольняють умову  $a + b + c = 1$ . Доведіть нерівність

$$(1 - a)^2 + (1 - b)^2 + (1 - c)^2 \geq 6\sqrt{abc}.$$

Чи може при вказаних умовах досягатись рівність?

5. У кожній клітині дошки  $m \times n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , у шаховому порядку розставлені букви  $A$  та  $B$ . Можна послідовно міняти букви у клітинах за такими правилами: вибираються дві клітини, які мають спільну сторону і букви у кожній з них замінюються таким чином: якщо у клітині записана буква  $A$ , то замість неї записують букву  $B$ , якщо у клітині записана буква  $B$ , то замість неї записують букву  $B$ , і нарешті, якщо у клітині записана буква  $B$ , то замість неї записують букву  $A$ . При яких  $m$  і  $n$  можна за скінченну кількість кроків одержати дошку, яка заповнена буквами у протилежному до початкового порядку (тобто у клітинах, де була записана  $A$ , буде записано  $B$ , і навпаки).

23 січня 2010 р.

На виконання завдання відводиться 4 години  
Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Користування довільними зовнішніми джерелами інформації,  
а також будь-якими електронними засобами забороняється**  
Умови та розв'язання задач по усіх класах будуть наведені на сайті  
[www.matholymp.org.ua](http://www.matholymp.org.ua)

## 10 класс

1. Рассмотрим четырехзначное число, а также четырехзначное число, которое записано теми же самими цифрами в обратном порядке. Какое наибольшее число цифр 5 может иметь в своей десятичной записи модуль разности таких чисел?

2. Решите уравнение:

$$(x+1)^5 + (x+1)^4(x-1) + (x+1)^3(x-1)^2 + (x+1)^2(x-1)^3 + (x+1)(x-1)^4 + (x-1)^5 = 0.$$

3. Внутри квадрата  $ABCD$  выбрана точка  $O$ . Квадрат  $A'B'C'D'$  – образ квадрата  $ABCD$  при гомотетии с центром в точке  $O$  и коэффициентом  $k > 1$  (точки  $A', B', C', D'$  являются образами точек  $A, B, C, D$  соответственно). Докажите, что сумма площадей четырехугольников  $A'ABB'$  и  $C'CDD'$  равна сумме площадей четырехугольников  $B'VCC'$  и  $D'DAA'$ .

4. Неотрицательные числа  $a, b, c$  удовлетворяют условию  $a + b + c = 1$ . Докажите неравенство

$$(1 - a)^2 + (1 - b)^2 + (1 - c)^2 \geq 6\sqrt{abc}.$$

Может ли при указанных условиях достигаться равенство?

5. В каждой клетке доски  $m \times n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , в шахматном порядке расставлены буквы  $A$  и  $B$ . Можно последовательно менять буквы в клетках по таким правилам: выбираются две клетки, которые имеют общую сторону и буквы в каждой из них заменятся таким образом: если в клетке записана буква  $A$ , то вместо нее записывают букву  $B$ , если в клетке записана буква  $B$ , то вместо нее записывают букву  $A$ . При яких  $m$  и  $n$  можно за конечное число шагов получить доску, которая заполнена буквами в противоположном к начальному порядку (т.е. в клетках, где была записана  $A$ , будет записана  $B$ , и наоборот).

23 января 2010 г.

На выполнение задания дается 4 часа  
Каждая задача оценивается в 7 баллов

**Пользоваться всевозможными внешними источниками информации,  
а также любыми электронными устройствами запрещается**  
Условия и решения задач по всем классам будут размещены на сайте  
[www.matholymp.org.ua](http://www.matholymp.org.ua)