Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Завдання I туру III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики

11 клас

1. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких виконується рівність:

$$-2^0 + 2^1 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \ldots + (-2)^n = 4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^{2010}?$$

2. У кубі розміром $11 \times 11 \times 11$ зовнішній шар одиничних кубиків пофарбовано у жовтий колір, наступний шар, що дотикається до цього зовнішнього жовтого фарбується у блакитний, наступний шар – знову у жовтий і так далі. Знайти загальну кількість жовтих та блакитних одиничних кубиків.

3. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло та має перпендикулярні діагоналі. Точки K, L, M, Q – точки перетину висот трикутників ABD, ACD, BCD, ABC відповідно. Довести, що чотирикутник $KLMQ$ рівний чотирикутнику $ABCD$.

4. Доведіть, що для кожного натурального n рівняння $a^n + 2010b^n = c^{n+1}$ має нескінченну кількість розв'язків у натуральних числах a, b, c.

5. Числа x, y, z задовольняють умову $x \in (0,1]$, $y \in (0,1]$, $z \in (0,1]$. Доведіть нерівність

$$\frac{x}{2+xy+yz} + \frac{y}{2+yz+zx} + \frac{z}{2+zx+xy} \leq \frac{x+y+z}{x+y+z+xyz}.$$

23 січня 2010 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Користування довільними зовнішніми джерелами інформації, а також будь-якими електронними засобами забороняється
Умови та розв'язання задач по усіх класах будуть наведені на сайті www.matholymp.org.ua

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Завдания I тура III этапа Всеукраинской олимпиады по математике

11 класс

1. Найдите все натуральные значения n, при которых выполняется равенство:
$$-2^0 + 2^1 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \ldots + (-2)^n = 4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^{2010}?$$

2. В кубе размером $11 \times 11 \times 11$ внешний слой единичных кубиков окрашено в желтый цвет, следующий слой, который касается этого внешнего желтого красится в голубой, следующий слой – снова в желтый и так далее. Найдите общее число желтых и голубых единичных кубиков.

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность и имеет перпендикулярные диагонали. Точки K, L, M, Q – точки пересечения высот треугольников $ABD, ACD,$ соответственно. Докажите, что четырехугольник $KLMQ$ равен четырехугольнику $ABCD$.

4. Докажите, что для каждого натурального n уравнение $a^n + 2010b^n = c^{n+1}$ имеет бесконечное число решений в натуральных числах a, b, c.

5. Числа x, y, z удовлетворяют условие $x \in (0,1]$, $y \in (0,1]$, $z \in (0,1]$. Докажите неравенство
$$\frac{x}{2+xy+yz} + \frac{y}{2+yz+zx} + \frac{z}{2+zx+xy} \leq \frac{x+y+z}{x+y+z+xyz}.$$

23 января 2010 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

Пользоваться всевозможными внешними источниками информации, а также любыми электронными устройствами запрещается
Условия и решения задач по всем классам будут размещены на сайте www.matholymp.org.ua