Областное управление образования и науки
Областной институт последипломного педагогического образования
Отдел математики

III этап (Областной)
Всеукраинской ученической олимпиады по математике

11 класс.

1. a, b, c — стороны треугольника. Доказать, что

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}<\frac{1}{8}.$$

2. x, y и z — положительные числа, произведение которых равно 1. Доказать, что выполнено неравенство

$$x^2+y^2+z^2+3\ge x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}..$$

3. Найти все решения в целых числах уравнения

$$\left(4+\sqrt{3}\right)^n=\left(11+6\sqrt{3}\right)^m.$$

4. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, так что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Доказать, что $S_{ABC}\ge 4S_{A_1B_1C_1}$, где S — площадь треугольника.

5. Дан бесконечный клетчатый лист бумаги, все клетки которого белые. За один ход выбирается произвольный квадрат либо 3×3 клетки, либо 4×4 клетки и все клетки в нём перекрашиваются. (Т.е. все белые клетки внутри выбранного квадрата становятся чёрными, а все чёрные — белыми). Можно ли за несколько таких ходов добиться, чтобы был закрашен **только** прямоугольник 4×6 клеток.

(Каждая задача оценивается в 10 баллов)

На обложке работы укажите ФИО, школу, класс, полный домашний адрес с почтовым индексом, домашний телефон, e-mail, ФИО учителя математики и ФИО преподавателя, который готовил Вас к олимпиаде.

Обласне управління освіти і науки
Обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
Відділ математики

III етап (Обласний)
Всеукраїнської учнівської Олімпіади з математики

11 клас.

1. a, b, c — сторони трикутника. Довести, що

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}<\frac{1}{8}.$$

2. x, y и z — додатні числа, добуток яких дорівнює 1. Довести, що виконується нерівність

$$x^2+y^2+z^2+3\ge x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

3. Знайти всі розв’язки в цілих числах рівняння

$$\left(4+\sqrt{3}\right)^n=\left(11+6\sqrt{3}\right)^m.$$

4. На сторонах AB, BC и CA трикутника ABC обрано точки C_1, A_1 та B_1 відповідно, таким чином, що відрізки AA_1, BB_1 и CC_1 перетинаються в одній точці. Довести, що $S_{ABC}\ge 4S_{A_1B_1C_1}$, де S — площа трикутника.

5. Дано нескінчений клітчатий аркуш паперу, всі клітинки якого білі. За один хід обирається довільний квадрат або 3×3 клітинки, або ж 4×4 клітинки, і всі клітинки в ньому перефарбовуються. (Тобто всі білі клітинки в обраному квадраті стають чорними, а всі чорні — білими). Чи можна за кілька таких ходів досягти того, що буде зафарбовано **лише** прямокутник 4×6 клітинок.

(Кожне завдання оцінюється в 10 балів)

На обкладинці роботи вкажіть ПІБ, школу, клас, повну домашню адресу з поштовим індексом, домашній телефон, e-mail, ПІБ вчителя математики и ПІБ викладача, який готував Вас до Олімпіади.