Областное управление образования и науки
Областной институт последипломного педагогического образования
Отдел математики

III этап (областной)
Всеукраинской ученической олимпиады по математике

4 февраля 2012 г.

7 класс

1. Вычислите без калькулятора:

$$A = \frac{2012}{2012201220122012^2 - 2012201220122011 \cdot 2012201220122013}.$$

2. Докажите, что

$$(a+b)^2 - (c+d)^2 + (a+c)^2 - (b+d)^2 = 2(a-d)(a+b+c+d).$$

3. На сторонах шестиугольника записано по одному числу, а в каждой его вершине — число, равное сумме двух чисел на сторонах, выходящих из вершины. После этого все числа на сторонах и в одной из вершин стёрли. Можно ли восстановить стёртое число в вершине? Ответ обоснуйте.

4. Найдите наименьшее натуральное число, большее единицы, которое при делении на 2, 3, 5, 7 и 11 даёт в остатке 1.

5. В клеточках таблицы 4×4 расставлены числа, как показано на рис. 1. На каждом шагу разрешается взять пять клеточек, образующих фигурку, изображённую на рис. 2, и прибавить к числам, стоящим в этих клеточках, по единице (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Можно ли, выполнив некоторое число таких шагов, сделать все числа в таблице равными? Ответ обоснуйте.

2	0	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	2

Рис. 1

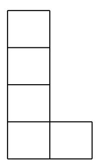

Рис. 2

Каждое задание оценивается в 10 баллов.

На обложке работы укажите ФИО, школу, класс, полный домашний адрес с почтовым индексом, домашний телефон, ФИО учителя математики и ФИО учителя (преподавателя), который готовил Вас к олимпиаде.

Обласне управління освіти і науки
Обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
Відділ математики

III етап (обласний)
Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

4 лютого 2012 р.

7 клас

1. Обчисліть без калькулятора:

$$A = \frac{2012}{2012201220122012^2 - 2012201220122011 \cdot 2012201220122013}.$$

2. Доведіть, що

$$(a+b)^2 - (c+d)^2 + (a+c)^2 - (b+d)^2 = 2(a-d)(a+b+c+d).$$

3. На сторонах шестикутника записано по одному числу, а у кожній його вершині — число, яке дорівнює сумі двох чисел на сторонах, що виходять з вершини. Після цього всі числа на сторонах і в одній з вершин стерли. Чи можна відновити стерте число у вершині? Відповідь обґрунтуйте.

4. Знайдіть найменше натуральне число, більше від одиниці, яке при діленні на 2, 3, 5, 7 та 11 дає в залишку 1.

5. У клітинках таблиці 4×4 розставлені числа, як показано на рис. 1. На кожному кроці дозволяється взяти п'ять клітинок, що утворюють фігурку, зображену на рис. 2, і додати до чисел, які стоять у цих клітинках, по одиниці (фігурку можна повертати і перевертати). Чи можна, виконавши деяку кількість таких кроків, зробити всі числа в таблиці рівними? Відповідь обґрунтуйте.

2	0	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	2

Рис. 1

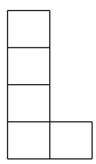

Рис. 2

Кожне завдання оцінюється в 10 балів.

На обкладинці роботи вкажіть ПІБ, школу, клас, повну домашню адресу з поштовим індексом, домашній телефон, ПІБ вчителя математики і ПІБ вчителя (викладача), який готував Вас до олімпіади.

Областное управление образования и науки
Областной институт последипломного педагогического образования
Отдел математики

III этап (областной)
Всеукраинской ученической олимпиады по математике

4 февраля 2012 г.

8 класс

1. Найдите все целые числа p, для которых уравнение

$$x^2 + px + 2011 = 0$$

имеет целый корень.

2. Гриб считаем плохим, если в нём более, чем 6 червяков. Червяка назовём голодным, если он съел не более $\dfrac{1}{7}$ гриба. Пятая часть всех грибов в лесу плохая. Докажите, что голодных червяков не менее, чем $\dfrac{1}{30}$ всех червяков.

3. Можно ли не более, чем за 99 взвешиваний на весах без гирек найти самую лёгкую и самую тяжёлую монеты среди 67 монет, любые две из которых имеют различный вес? Ответ обоснуйте.

4. Докажите, что прямая, проходящая через середину стороны треугольника и параллельная биссектрисе противолежащего угла, разбивает этот треугольник на два многоугольника одинакового периметра.

5. В клеточках таблицы размером 8×8 записаны попарно различные натуральные числа, каждое из которых является простым или произведением двух простых чисел. Известно, что для любого числа a из таблицы в той же самой строке или в том же самом столбце существует число, не являющееся взаимно простым с a. Найдите наибольшее возможное количество простых чисел в таблице.

Каждое задание оценивается в 10 баллов.

На обложке работы укажите ФИО, школу, класс, полный домашний адрес с почтовым индексом, домашний телефон, ФИО учителя математики и ФИО учителя (преподавателя), который готовил Вас к олимпиаде.

Обласне управління освіти і науки
Обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
Відділ математики

III етап (обласний)
Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

4 лютого 2012 р.

8 клас

1. Знайдіть всі цілі числа p, для яких рівняння

$$x^2 + px + 2011 = 0$$

має цілий корінь.

2. Гриб вважаємо поганим, якщо у ньому більше, ніж 6 хробаків. Хробака назвемо голодним, якщо він з'їв не більше $\frac{1}{7}$ гриба. П'ята частина всіх грибів у лісі погана. Доведіть, що голодних хробаків не менше, ніж $\frac{1}{30}$ від всіх хробаків.

3. Чи можна не більше, ніж за 99 зважувань на терезах без гирьок знайти найлегшу і найважчу монети серед 67 монет, будь-які дві з яких мають різну вагу? Відповідь обґрунтуйте.

4. Доведіть, що пряма, яка проходить через середину сторони трикутника і є паралельною до бісектриси протилежного кута, розбиває цей трикутник на два многокутники однакового периметра.

5. У клітинках таблиці розміром 8×8 записані попарно різні натуральні числа, кожне з яких є простим або добутком двох простих чисел. Відомо, що для будь-якого числа a з таблиці в тому самому рядку або в тому самому стовпчику існує число, яке не є взаємно простим з a. Знайдіть найбільшу можливу кількість простих чисел в таблиці.

Кожне завдання оцінюється в 10 балів.

На обкладинці роботи вкажіть ПІБ, школу, клас, повну домашню адресу з поштовим індексом, домашній телефон, ПІБ вчителя математики і ПІБ вчителя (викладача), який готував Вас до олімпіади.

Областное управление образования и науки
Областной институт последипломного педагогического образования
Отдел математики

III этап (областной)
Всеукраинской ученической олимпиады по математике

4 февраля 2012 г.

9 класс

1. Целые числа a, b, c удовлетворяют условию $ab + bc + ac = 1$. Докажите, что число
$$A = (1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$$
является полным квадратом некоторого натурального числа.

2. Петя и Дима выехали в полдень из города A в город B на велосипедах. Одновременно из B в A на велосипеде выехал Юра. Все они едут с постоянными, но различными скоростями. В два часа дня Дима был ровно посередине между Петей и Юрой, а в три часа дня Юра был ровно посередине между Петей и Димой. В котором часу Петя был ровно посередине между Димой и Юрой, если известно, что в этот момент все трое были ещё в пути? Ответ обоснуйте. (В этой задаче имеется в виду, что мальчики, доехав до пунктов A и B соответственно, не прекращают движение и едут дальше.)

3. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Пусть P — середина дуги AD окружности, описанной около этого четырёхугольника, не содержащей точек B и C, M — точка пересечения отрезков AC и BP, а N — точка пересечения отрезков BD и CP. Известно, что $MP = NP$. Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

4. Существует ли выпуклый 2012-угольник, у которого все углы равны целому числу градусов? Ответ обоснуйте.

5. Докажите, что для произвольных положительных действительных чисел x, y и z имеет место неравенство:
$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{x+y+z}{2}.$$

Каждое задание оценивается в 10 баллов.

На обложке работы укажите ФИО, школу, класс, полный домашний адрес с почтовым индексом, домашний телефон, ФИО учителя математики и ФИО учителя (преподавателя), который готовил Вас к олимпиаде.

Обласне управління освіти і науки
Обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
Відділ математики

III етап (обласний)
Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

4 лютого 2012 р.

9 клас

1. Цілі числа a, b, c задовольняють умову $ab + bc + ac = 1$. Доведіть, що число

$$A = (1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$$

є повним квадратом деякого натурального числа.

2. Петро і Дмитро виїхали опівдні з міста A до міста B на велосипедах. Одночасно з B до A на велосипеді виїхав Юрко. Усі вони їдуть зі сталими, але різними швидкостями. О другій годині дня Дмитро був рівно посередині між Петром і Юрком, а о третій годині дня Юрко був рівно посередині між Петром і Дмитром. О котрій годині Петро був рівно посередині між Дмитром і Юрком, якщо відомо, що в цей момент усі троє були ще у дорозі? Відповідь обґрунтуйте. (У цій задачі мається на увазі, що хлопчики, доїхавши до пунктів A та B відповідно, не припиняють рухатись та їдуть далі.)

3. Дано вписаний чотирикутник $ABCD$. Нехай P — середина дуги AD кола, описаного навколо цього чотирикутника, яка не містить точок B і C, M — точка перетину відрізків AC і BP, а N — точка перетину відрізків BD і CP. Відомо, що $MP = NP$. Доведіть, що прямі BC та AD паралельні.

4. Чи існує опуклий 2012-кутник, в якого всі кути дорівнюють цілому числу градусів? Відповідь обґрунтуйте.

5. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел x, y і z має місце нерівність:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{x+y+z}{2}.$$

Кожне завдання оцінюється в 10 балів.

На обкладинці роботи вкажіть ПІБ, школу, клас, повну домашню адресу з поштовим індексом, домашній телефон, ПІБ вчителя математики і ПІБ вчителя (викладача), який готував Вас до олімпіади.

Указания и решения (7 класс)

1. *Ответ:* $A = 2012$.

Пусть $x = 2012201220122012$. Тогда

$$A = \frac{2012}{x^2 - (x^2-1)} = 2012.$$

2. Имеем: $(a+b)^2 - (c+d)^2 + (a+c)^2 - (b+d)^2 = (a+b+c+d)(a+b-(c+d)) + (a+b+c+d)(a+c-(b+d)) = (a+b+c+d)(a+b-c-d+a+c-b-d) = 2(a+b+c+d)(a-d)$.

3. *Ответ:* да, можно.

Занумеруем подряд вершины по часовой стрелке $A_1, A_2, \ldots, A_6$, начиная с вершины, в которой стёрли число. Будем считать, что A_j — это число в j-й вершине; A_1 — стёртое число. Ясно, что $A_2+A_4+A_6 = A_1+A_3+A_5$. В записанном равенстве только A_1 неизвестно. Таким образом, $A_1 = A_2 + A_4 + A_6 - A_3 - A_5$.

4. *Ответ:* $2311 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$.

Если N — натуральное число, которое при делении на 2, 3, 5, 7 и 11 даёт в остатке 1, то $(N-1)$ — целое неотрицательное число, делящееся на 2, 3, 5, 7 и 11, и, поскольку это взаимно простые числа, то число, делящееся на их произведение, имеет вид $N - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot k$, где k — целое неотрицательное число. Поэтому $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot k + 1$. Так как $N > 1$, то $k > 0$ и, следовательно, при $k = 1$ имеем наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условиям задачи.

5. *Ответ:* нельзя.

Рассмотрим центральный квадрат 2×2 и раскрасим его клеточки в чёрный и белый цвета в шахматном порядке, как показано на рисунке:

ч	б
б	ч

.

Пусть S_1 — сумма чисел, стоящих на белых клеточках, а S_2 — сумма чисел, стоящих на чёрных клеточках, и пусть $S = S_1 - S_2$. Заметим, что если применить указанную в условии задачи операцию, то она или не влияет на числа, стоящие в данном квадрате 2×2, или увеличивает на 1 два соседних по стороне числа. А так как соседние по стороне клеточки центрального квадрата 2×2 покрашены в разные цвета, то числа S_1 и S_2 на каждом шагу или не меняются, или оба увеличиваются на 1. Таким образом, указанная в условии задачи операция не меняет величину S. Но исходное значение S было равно $S_1 - S_2 = (1+1)-(0+0) = 2$, а если все числа в таблице равны, то $S = 0$. Поэтому сделать все числа равными невозможно.

Указания и решения (8 класс)

1. *Ответ:* $p = \pm 2012$.

Пусть x_1, x_2 — корни. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = 2011$. Из первого равенства видно, что если первый корень является целым числом, то и второй — целое число. Но 2011 — простое число, поэтому из второго равенства получаем, что или $x_1 = 1$, $x_2 = 2011$, или $x_1 = -1$, $x_2 = -2011$. Отсюда получаем ответ.

2. Сытым назовём червяка, который съел более $\dfrac{1}{7}$ гриба. Поэтому в любом грибе не более 6 сытых червяков. Так как в плохом грибе живёт не менее, чем 7 червяков, то по крайней мере один из них голодный.

Пусть k — число плохих грибов, тогда в них не менее k голодных червяков. Число всех грибов в лесу $5k$, а число сытых червяков не более, чем $6 \cdot 5k = 30k$. Таким образом, голодных червяков $\geqslant k$, а сытых $\leqslant 30k$, поэтому

$$\frac{\text{голодных}}{\text{сытых}} \geqslant \frac{k}{30k} = \frac{1}{30}.$$

3. *Ответ:* можно.

Разобьём монеты на 33 пары и отдельно отложим одну монету. Сравнивая вес монет в каждой из 33 пар, разобьём монеты за 33 взвешивания на две группы, в одну из которых возьмём 33 более лёгких в каждой паре монеты, а в другую — 33 более тяжёлых. Очевидно, что самую лёгкую монету следует искать в группе, которая состоит из 33 более лёгких монет и 1 отложенной, а самую тяжёлую в группе из 33 более тяжёлых и 1 отложенной монеты. Таким образом, из группы 33 более лёгких монет будем класть на чашки весов по одной монете и, каждый раз отбрасывая более тяжёлую, за 32 взвешивания определим самую лёгкую монету в этой группе. Аналогично для группы 33 более тяжёлых монет за 32 взвешивания найдём самую тяжёлую в этой группе монету. Сравним вес найденной более тяжёлой монеты (из группы более тяжёлых монет) с весом отложенной монеты, а в случае, когда отложенная монета окажется более лёгкой, дополнительно сравним её вес с весом найденной более лёгкой монеты (из группы более лёгких монет). Таким образом, не более, чем за 33+32+32+2=99 взвешиваний найдём самую лёгкую и самую тяжёлую монеты.

4. Рассмотрим треугольник ABC. Не нарушая общности, считаем, что $AC \geqslant AB$. Пусть AA_1 — биссектриса угла A (точка A_1 лежит на отрезке BC), A_2 — середина стороны BC, а A_2D_1 — прямая, параллельная биссектрисе угла A (точка D_1 лежит на стороне AC или на её продолжении за точку A).

Отложим на продолжении стороны AC за точку A отрезок $AD = AB$. Тогда треугольник DAB равнобедренный, причём

$$\angle ADB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAB) = \frac{1}{2}\angle CAB = \angle CAA_1,$$

то есть $DB \parallel AA_1 \parallel D_1A_2$.

Отсюда D_1A_2 — средняя линия треугольника BCD и делит сторону CD пополам. Но длина CD равна сумме длин сторон AC и AB. Заметим, что точка D_1 лежит на стороне AC, а не на её продолжении, поскольку

$$CD_1 = \frac{1}{2}(CA + AD) = \frac{1}{2}(AC + AB) \leqslant AC.$$

Таким образом, $CD_1 = D_1A + AB$.

Для периметра треугольника CD_1A_2 и четырёхугольника A_2D_1AB (он вырождается в треугольник, если $D_1 = A$), на которые прямая A_2D_1 разбивает исходный треугольник, имеем:

$$P_{CD_1A_2} = CD_1 + D_1A_2 + A_2C = (D_1A + AB) + D_1A_2 + A_2B = P_{A_2D_1AB},$$

что и требовалось доказать.

5. *Ответ:* 42.

По условию для каждого простого числа в таблице должно найтись составное число, которое не взаимно просто с ним. Поскольку каждое составное число в таблице является произведением двух простых, то оно может иметь общий делитель с максимум двумя простыми числами из таблицы, то есть на каждое составное число в таблице приходится максимум два простых. Таким образом, если бы в таблице было по крайней мере 43 простых числа, то составных чисел должно быть по крайней мере 22, а всего в 64 клеточках таблицы было бы по крайней мере 65 чисел, противоречие. Поэтому количество простых чисел в таблице не превышает 42.

Приведём пример таблицы, в которой ровно 42 простых числа. Для этого разобьём таблицу на квадрат 2×2 и два прямоугольника 2×6 и 6×8, которые в свою очередь разделим на 20 меньших прямоугольников 1×3 и 3×1. Клеточки каждого прямоугольника 1×3 или 3×1 заполним числами p_1, p_2 и p_1p_2, где p_1, p_2 — различные простые числа, свои для каждого прямоугольника, а клеточки квадрата 2×2 можно заполнить так:

p_1	p_1p_2
p_1p_3	p_2

(p_1, p_2, p_3 — различные простые числа, которых нет в других клеточках таблицы). Очевидно, что полученная таблица удовлетворяет условию задачи и содержит ровно 42 простых числа.

Указания и решения (9 класс)

1. Из условия вытекает, что $a^2+ab+bc+ca=1+a^2$, или $(a+b)(a+c)=1+a^2$. Аналогично $(a+b)(b+c)=1+b^2$ и $(c+b)(a+c)=1+c^2$. Отсюда

$$A=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)=\left[(a+b)(b+c)(a+c)\right]^2,$$

что и требовалось доказать.

2. *Ответ:* в 6 часов.

Направим координатную ось вдоль пути от точки A до точки B, причём начало координат поместим в точку A, и будем считать, что координата точки B равна 1. Пусть v_1, v_2 и v_3 — скорости Пети, Димы и Юры соответственно, тогда в 2 часа дня Петя был в точке $2v_1$, Дима — в точке $2v_2$, а Юра — в точке $1-2v_3$. Таким образом, условие того, что Дима был посередине между Петей и Юрой, запишется так:

$$\frac{1}{2}\left(2v_1+(1-2v_3)\right)=2v_2. \tag{1}$$

Аналогично, в 3 часа дня Юра был посередине между Петей и Димой, следовательно,

$$\frac{1}{2}\left(3v_1+3v_2\right)=1-3v_3. \tag{2}$$

Пусть t — искомое время. Тогда условие того, что Петя был посередине между Димой и Юрой, запишется так:

$$\frac{1}{2}\left(v_2t+(1-v_3t)\right)=v_1t. \tag{3}$$

Перепишем равенства (1) и (2) в виде

$$\begin{cases} -2v_1+4v_2=1-2v_3, \\ 3v_1+3v_2=2-6v_3. \end{cases}$$

Выразим отсюда v_1 и v_2 через v_3:

$$v_1=\frac{5}{18}-v_3, \qquad v_2=\frac{7}{18}-v_3.$$

Теперь перепишем равенство (3) в виде $(2v_1-v_2+v_3)t=1$ и подставим в него найденные выражения для v_1 и v_2:

$$\left[2\left(\frac{5}{18}-v_3\right)-\left(\frac{7}{18}-v_3\right)+v_3\right]t=\frac{1}{6}t=1,$$

откуда $t=6$.

3. Так как P — середина дуги AD, то $\angle ABP = \angle DBP = \angle ACP = \angle PCD$ как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги. Тогда $\angle MBN = \angle MCN$, а, значит, четырёхугольник $BCNM$ вписанный. Заметим, что $\angle BMN = 180^\circ - \angle PMN$, $\angle CNM = 180^\circ - \angle MNP$, а так как $MP = NP$, то $\angle PMN = \angle MNP$. Таким образом, $\angle BMN = \angle CNM$. Так как четырёхугольник $BCNM$ вписанный, то $\angle MBC + \angle CNM = 180^\circ$, $\angle NCB + \angle BMN = 180^\circ$. Поэтому, учитывая, что $\angle BMN = \angle CNM$, получаем, что $\angle MBC = \angle NCB$. Тогда

$$\angle ABC = \angle ABP + \angle MBC = \angle DCP + \angle NCB = \angle BCD.$$

Воспользовавшись тем, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный, получаем $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$, значит, $\angle BCD + \angle CDA = 180^\circ$. Это означает, что сумма односторонних углов при секущей CD равна 180°. Таким образом, $BC \parallel AD$, что и следовало доказать.

4. *Ответ:* не существует.

Рассуждая от противного, предположим, что такой многоугольник существует. Каждый угол этого многоугольника не превышает 179°, так как он меньше 180° и является целым числом. Оценим сумму углов α_j выпуклого n-угольника ($n = 2012$). С одной стороны, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2012} \leqslant 179 \cdot 2012$, а с другой стороны

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2012} = (n-2) \cdot 180 = 2010 \cdot 180.$$

Но $179 \cdot 2012 < 2010 \cdot 180$, противоречие.

5. *Первый способ.* Используем неравенство $\dfrac{a^2}{b} \geqslant 2a - b$, которое имеет место для произвольных положительных чисел a и b (для $b > 0$ оно равносильно очевидному неравенству $a^2 \geqslant 2ab - b^2$). Подставляя $a = 2x$, $b = y + z$, получаем

$$\frac{(2x)^2}{y+z} \geqslant 2 \cdot (2x) - (y+z).$$

Аналогично, подставляя $a = 2y$, $b = x + z$ и $a = 2z$, $b = x + y$, получаем

$$\frac{(2y)^2}{x+z} \geqslant 2 \cdot (2y) - (x+z), \quad \frac{(2z)^2}{x+y} \geqslant 2 \cdot (2z) - (x+y).$$

Складывая три последние неравенства и приводя подобные в правой части, получим

$$\frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y} \geqslant 2(x+y+z).$$

Отсюда получим требуемое.

Второй способ. Применим неравенство Коши — Буняковского к наборам положительных чисел

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{x+z}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right) \quad \text{и} \quad \left(\sqrt{y+z}, \sqrt{x+z}, \sqrt{x+y}\right).$$

Имеем

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}\sqrt{y+z} + \frac{y}{\sqrt{x+z}}\sqrt{x+z} + \frac{z}{\sqrt{x+y}}\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}}\sqrt{(y+z)+(x+z)+(x+y)},$$

то есть

$$x + y + z \leqslant \sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}}\sqrt{2(x+y+z)}.$$

Остаётся разделить обе части неравенства на $\sqrt{2(x+y+z)}$ и возвести их в квадрат.