**Задачи с целыми числами*.* Четные и нечетные числа**

Обычно четные и нечетные числа связывают только с натуральными числами. Здесь мы распространим их на любые целые числа. Целое число называется четным, если оно делится на 2, и нечетным, если оно на 2 не делится.

Любое четное число можно представить в виде 2*а*, а любое нечетное – в виде 2*а* + 1, где *а* – целое число.

Два целых числа называются *числами одинаковой четности*, если оба они четные или оба нечетные. Два целых числа называются *числами разной* *четности*, если одно из них четное, а другое нечетное.

Рассмотрим свойства четных и нечетных чисел важные, для решения задач.

1)                 *Если хотя бы один множитель произведения двух (или нескольких) чисел четен, то и все произведение четно.*

2)                 *Если каждый множитель произведения двух ( или нескольких ) чисел нечетен, то и все произведение нечетно.*

3)                 *Сумма любого количества четных чисел есть число четное.*

4)                 *Сумма четного и нечетного чисел есть число нечетное.*

5)                 *Сумма четного количества нечетных чисел есть число четное; сумма нечетного количества нечетных чисел есть число нечетное.*

***Задачи***

**1.** В пятиэтажном доме с четырьмя подъездами подсчитали число жителей на каждом этаже и, кроме того, в каждом подъезде. Могут ли все полученные 9 чисел быть нечетными?

**Решение.**

Обозначим число жителей на этажах соответственно через *а1, а2, а3, а4, а5,* а число жителей в подъездах – соответственно через *b1, b2, b3, b4.* Тогда общее число жителей дома можно подсчитать двумя способами – по этажам и по подъездам:

*a1 + а2 + а3 + а4 + а5 = b1 + b2 + b3 + b4.*

Если бы все эти 9 чисел были нечетными, то сумма в левой части записанного равенства была бы нечетной, а сумма в правой части – четной. Следовательно, это невозможно.

Ответ: не могут.

**2.** В футбольном турнире в один круг участвуют 15 команд. Докажите, что в любой момент турнира найдется команда, которая сыграла к этому моменту четное число матчей (может быть, ни одного ).

**Решение.**

Обозначим число матчей, проведенных первой, второй, третьей и т. д. командами, через *а1, а2, а3,…, а15.*

Допустим, что все эти 15 чисел нечетны. Подсчитаем общее число матчей, проведенных командами. Оно равно

*( а1 + а2 +…+ а15)/2.*

Но числитель дроби есть число нечетное, как сумма нечетного числа нечетных слагаемых. Тогда общее число матчей есть число дробное. Получили противоречие.

Утверждение задачи есть частный случай одной из теорем теории графов.

**3.** Четно или нечетно произведение

*( 7а + b – 2c +1 )( 3a – 5b + 4c + 10 ),*

где числа *a, b, c* – целые?

**Решение.**

Можно перебирать случаи, связанные с четностью или нечетностью чисел *а, b, c* (8 случаев!), но проще поступить иначе. Сложим множители:

*( 7a + b – 2c + 1 ) + ( 3a – 5b + 4c + 10) =*

*= 10a – 4b + 2c + 11.*

Так как полученная сумма нечетна, то один из множителей данного произведения четен, а другой нечетен. Следовательно, само произведение четно.

Ответ: четно.

**4.** Пусть *а1, а2, а3,…, а25* – целые числа, а *с1, с2, с3,…, с25* – те же самые числа, взятые в другом порядке. Докажите, что число

*(а1 – с1)(а2 – с2)(а3 – с3) … (а25 – с25)*

является четным.

**5.** Четно или нечетно число

1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 +…+ 993 ?

**Решение.**

Разность 1 – 2 имеет ту же четность, что и сумма 1 + 2, разность 3 – 4 – ту же четность, что и сумма 3 + 4, и т. д. Поэтому данная сумма имеет ту же четность, что и сумма

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +…+ 993.

Из 993 слагаемых последней суммы 496 четных и 497 нечетных, следовательно, сумма нечетно.

О т в е т: нечетно.

**6.** На прямой расположено несколько точек. Затем между каждыми двумя соседними точками поставили еще по точке. И т. д. Докажите, что после каждой такой операции общее число точек будет нечетным.

**Указание.**

Если имеется *п* точек и к ним добавляется еще *п* – 1 промежуточных точек, то общее число точек становится нечетным, так как *п*+(*п*–1) = =2*п* – 1.

**7.** Найдите все целые значения а, при которых число

x 3 + ax2 + 5x + 9

нечетно для всех целых значений х.

**8.** На семи карточках написали числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Затем карточки перевернули, перемешали и на обратных сторонах написали те же числа. Числа, написанные на обеих сторонах каждой карточки, сложили и полученные суммы перемножили. Четно или нечетно полученное произведение?

**Решение.**

Допустим, что произведение нечетно. Для этого все 7 множителей должны быть нечетными. Но тогда у четырех карточек, у которых на одной стороне написаны нечетные числа 1, 3, 5, 7, на другой стороне должны быть числа четные. Однако четных чисел здесь - только три. Следовательно, этот случай невозможен.

Ответ: четно.

**9.** Докажите, что в любой компании число тех людей, которые знакомы с нечетным числом членов компании, четно.

**Решение.**

Обозначим число людей, которые имеют в компании нечетное число знакомых, через *k*, а число знакомых этих людей соответственно через *a1, a2,…, ak .* Кроме того, число людей, знакомых с четным числом членов компании, обозначим через *n*, а число знакомых этих людей соответственно через *b1,b2,…,bn*. Тогда общее число знакомств равно

*( a1 + a2 +…+ ak + b1 + b2 +…+ bn )/ 2*

Сумма *b1 + b2 +…+ bn*четна, так как все ее слагаемые четны.

Тогда для того, чтобы эта дробь была равна целому числу, сумма

*a1 + a2 +…+ ak* , должна быть четной. Но все слагаемые последней суммы нечетны, поэтому число k слагаемых суммы может быть только четным.

**10.** Докажите, что не существует многогранника, у которого 1997 граней – треугольники, а остальные грани – четырехугольники и шестиугольники.

**11.** Окружность разделили на 40 равных дуг и в 40 точках деления поставили по шашке. Среди шашек 25 белых и 15 черных. Докажите, что среди шашек найдутся белая и черная, которые стоят на концах одного диаметра.

**Решение.**

Допустим, что это не верно. Рассмотрим любую белую шашку и диаметр, на котором она стоит. Тогда по нашему допущению на другом конце этого диаметра должна стоять тоже белая шашка. Получается, что всего белых шашек ( как и черных ) четное число. Но последнее противоречит условию задачи.

**12.** Сумма номеров домов одного квартала равна 99, а соседнего квартала той же улицы – 117. Найдите номера всех домов этих кварталов.

**13.**В некотором натуральном числе произвольно переставили цифры. Докажите, что сумма полученного числа с исходным не может быть равна 999…9 (125 девяток).

**Решение.**

Обозначим исходное число через *а*, число, полученное из него после перестановки цифр – через *b*.

Допустим, что равенство

*а + b* = 999…9 (125 девяток)

возможно. Тогда при сложении чисел *а* и *b* не может быть переноса единицы в следующий разряд. Так как сумма цифр чисел *а* и *b* равны, то сумма цифр у числа *а + b* в два раза больше, чем у числа *а*, а значит она четна. Но с другой стороны , эта сумма равна 9 125, а следовательно, нечетна. Мы получили противоречие.

**14**. Какое наибольшее количество натуральных чисел можно записать в строку так, чтобы сумма любых трех соседних чисел была четной, а сумма любых четырех соседних чисел – нечетной?

**Решение.**

Обозначим последовательные натуральные числа строки через *а1, а2, а3* и т. д.

По условию суммы

*а1 + а2 + а3, а2 + а3 + а4, а3 + а4 + а5, а4 + а5 + а6*

и другие четны. Вычитая из каждой суммы, начиная со второй, предыдущую получим, что разности

*а4- а1, а5 - а2, а6 - а3,…*

четны, а следовательно, имеют одинаковую четность пары чисел

*а4*и *а1, а5* и *а2, а6* и *а3* и т. д.

Выпишем нечетные суммы, состоящие из четырех соседних чисел: *а1 + а2 + а3+ а4* = *(а1 + а2 + а3)+ а4 ,*

*а2 + а3 + а4+ а5 = (а2 + а3 + а4)+ а5,*

*а3 + а4 + а5+ а6 = (а3 + а4 + а5)+ а6,…*

Отсюда следует, что числа *а4, а5, а6* и т. д. нечетны. Но тогда сумма *а4 + а5 + а6* нечетна, а это противоречит условию.

Полученное противоречие возникает всякий раз, когда чисел не меньше шести. Попробуем взять пять чисел .

Рассуждая аналогично , устанавливаем, что числа *а4, а5* нечётны, а следовательно , по предыдущему, нечетны и числа *а1, а2* .Тогда, так как сумма *а1 + а2 + а3* чётна , то число *а3* чётно .

Сделаем ещё проверку и убедимся в том, что если взять пять чисел *а1, а2, а3, а4, а5* **,** где число *а3* чётно, а остальные нечётны, то каждая из сумм   *а1 + а2 + а3, а2 + а3 + а4, а3 + а4 + а5* чётна, а каждая из сумм  *а1 + а2 + а3 + а4* , *а2 + а3 + а4 + а5*нечётна.

Ответ: 5.

**15.**Можно ли на клетчатой бумаге, закрасить 25 клеток так, чтобы у каждой из них было: а) четное, б) нечетное число закрашенных соседей? (клетки называются соседями, если у них общая сторона )

**Решение.**

Предположим, что удалось закрасить 25 клеток требуемым образом. Попробуем найти число общих сторон закрашенных клеток и придем к противоречию. Сосчитаем, сколько у каждой клетки общих сторон с соседями, сложим полученные числа и сумму разделим пополам (так как каждую общую сторону мы считали при этом дважды ). У каждой клетки – нечетное число соседей, и клеток 25. Сумма 25 нечетных чисел нечетна и поэтому нацело на 2 не делится.

Ответ: а) можно, б) нельзя.

Такое же рассуждение показывает, что при любом нечетном n, закрасить n клеток так, чтобы у каждой было нечетное число закрашенных соседей, невозможно. В случае любого четного n такая раскраска возможна.

**16.** Существует ли замкнутая ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз и состоит из: а) 6 звеньев, б) 7 звеньев ?

**Простые и составные числа**

Натуральное число, большее 1, называется *простым*, если оно делится только на 1 и на само себя. Натуральное число называется *составным*, если оно имеет больше двух различных делителей.

Принято считать, что число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Отсюда следует, что множество натуральных чисел можно разбить на такие три подмножества: множество простых чисел, множество составных чисел и множество содержащее единственный элемент 1.

Справедлива следующая теорема.

*Любое натуральное число, большее 1, можно и притом единственным образом представить в виде произведения простых чисел.*

Это предложение называется *основной теоремой арифметики натуральных чисел.*

Среди простых делителей натурального числа могут быть равные, и их произведение можно записать в виде степени. Тогда разложение натурального числа *а* на простые множители можно представить в следующем виде:

*a* = p1 k1p2 k2 … pnkn ,

где p1, p2,…, pn - различные простые числа, k1, k2,…, kn – натуральные.

***Задачи***

**17.**К двузначному числу приписали такое же число. Может ли полученное число быть простым?

**18.** К числу, являющемуся произведением двух последовательных натуральных чисел, приписали справа число 21. Докажите, что полученное число – составное.

**19.** Натуральные числа *a* и *b* таковы, что 31*a* = 54*b*. Докажите, что число *a + b* – составное.

**Решение.**

Так как число 31*а* делится на 54 и числа 31 и 54 – взаимно простые, то *а* делится на 54: *a* = 54*n*; где *n*ÎN. Тогда

31 54 *n* = 54*b*, *b* = 31n.

Отсюда *a + b* = 54*n* + 31*n* = 85*n,* а следовательно, число *a + b* является составным.

**20.** Натуральные числа *a* и *b* удовлетворяют условию 15*a* = 32*b*. Может ли число *a – b* быть простым? Если может – постройте пример; если не может – докажите.

**21.** Назовите все натуральные *n*, при которых число *n*4 + 4 –составное.

**Решение.**

Попробуем разложить выражение *n*4 + 4 на множители с целыми коэффициентами. Мы привыкли к тому, что сумма квадратов на множители с целыми коэффициентами не раскладывается. В данном случае это делается с помощью приема «плюс – минус» следующим образом:

*n*4 + 4 = (*n*4 + 4 + 4*n*2) - 4*n*2 = (*n*2 + 2)2 - 4*n*2 = (*n*2 + 2*n* + 2)( *n*2 - 2*n* + 2).

Очевидно, множитель *n*2 + 2*n* + 2 всегда больше 1. Второй множитель *n*2 - 2*n* + 2 может быть равным 1:

*n*2 - 2*n* + 2 = 1, *n*2 - 2*n* + 1 = 0, (*n* – 1)2 = 0, *n* = 1.

Так как при *n* = 1 множитель  *n*2 + 2*n* + 2 принимает значение 5, являющееся простым числом, то значение *n* = 1 нужно отбросить.

Ответ: все *n* не равные 1.

**22.** Докажите, что любое число вида *а* = 101010…101 (*n* нулей, *n* + +1 единица, где *n* > 1) – составное.

**Решение.**

Преобразуем число *а*, учитывая, что всего у него 2*n* + 1 цифр, а следовательно, первая единица – разряда 2*n*:

*a* = 101010…101 = 102n + 102n-2 + 102n-4 +…+ 102 + 1 =

= (1/(102 -1))(102 – 1)(102n + 102n-2 +…+102 +1) =

= (1/99)(102n+2-1) = (1/99)((10n+1)2 – 1) = (1/99)(10n+1+1)( 10n+1-1).

Теперь рассмотрим два случая.

1)                 Пусть *n* четно.

Тогда сумма 10n+1+1 делится на 11, причем частное от такого деления больше 1, так как 10n+1+1 >11; разность 10n+1-1 делится на 9, причем частное также больше 1, так как 10n+1+1 >11; разность 10n+1-1 делится на 9, причем частное также больше 1. Получилось составное число

*а* = ((10n+1+1)/11) ((10n+1-1)/9).

2)                 Пусть *n* нечетно.

В этом случае разность 10n+1-1 делится на 102 – 1= 99 и частное больше 1, поскольку 10n+1-1 > 99.

**23.** Докажите, что все числа вида

10001,100010001,1000100010001,…

-                      составные.

**24.** Докажите, что число 8(35k + 55n) – 5 при любых натуральных k и n является составным.

**25.** Какое наибольшее число простых чисел может быть среди 15 последовательных натуральных чисел, больших 2?

**Решение.**

Очевидно, простые числа нужно искать среди нечетных. Из 15 последовательных натуральных чисел имеется 7 или 8 нечетных. Среди любых трех последовательных натуральных чисел ровно одно делится на 3, поэтому среди 7 или 8 последовательных нечетных натуральных чисел имеется 2 или 3 числа, делящихся на 3. Если их отбросить, то останется 5 или 6 нечетных чисел.

Нужно еще убедиться, что такие 6 простых чисел возможны. Например, если взять такие 15 последовательных натуральных чисел: 3, 4, 5, 6,…, 17, то среди них – 6 простых. 3, 5, 7, 11, 13, 17.

О т в е т: 6.

**26.** Составьте из простых чисел все возможные арифметические прогрессии с разностью 6 и числом членов, большим 4.

**27.** Докажите, что все числа p, p + 2, p + 4 являются простыми только в случае, когда они образуют тройку 3, 5, 7.

**Решение.**

Рассмотрим несколько случаев, в зависимости от p.

При p = 2 число p +2 = 4 – составное, поэтому значение p = 2 отпадает.

При p = 3 получим тройку 3, 5, 7, о которой упоминается в условии задачи.

При p = 5 число p + 2 = 7 – простое, но число p + 4 = 9 – составное, значит, p = 5 нужно отбросить.

При p = 7 число p + 2 = 9 – составное.

При p = 11 число p + 4 = 15 – тоже составное.

Возникает предположение, что подходит только p = 3. Докажем его.

Нетрудно заметить, что значение p = 5, p = 7, p = 11 не подходили потому, что или p + 2 или p + 4 делятся на 3. Убедимся, что так будет всегда при простом p>3.

Простое число, большее 3, не делится на 3 и, следовательно, при делении на 3 может давать в остатке только 1 или 2. Рассмотрим оба случая.

1)                 Пусть p при делении на 3 дает в остатке 1: p = 3k + 1 (kÎN). Тогда число p + 2 = (3k + 1) + 2 = 3k = 3 делится на 3, причем частное от этого деления больше 1. Значит число p + 2 составное.

2)                 Пусть p = 3k + 2 (kÎN). Тогда число p + 4 = (3k + 2) + 4 = 3k + 6 – составное.

**28.** Найдите все такие p, что числа p, p + 10 и p + 20 – простые.

Задачи этого пункта – это, по существу, числовые ребусы. Своеобразие таких задач в том, что одна из двух компонент действия получается из другой путем перестановки или зачеркивания цифр.

**Задачи на зачеркивание цифр в натуральном числе**

**29.** Найдите все натуральные числа, которые при зачеркивании последней цифры уменьшаются в 14 раз.

**Решение.**

Обозначим искомое число через 10*x + y*, где *x* – количество десятков числа, *y* – его последняя цифра. Тогда

10*x + y* = 14*x, y* = 4*x*.

Так как *y* есть цифра, то и *x* – цифра, причем не превосходящая 2. Полагая *x* = 1, 2, находим, что соответственно *y* = 4, 8.