**Методи обчислення границь**

Теорія границь - один з розділів математичного аналізу, який одним під силу освоїти, інші з труднощами обчислюють границі. Питання знаходження границь є досить загальним, оскільки існують десятки прийомів рішення границь різних видів.

1. Обчислення границь методом підстановки

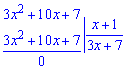
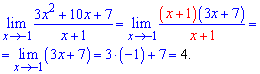
Приклад 1. Знайти границю функції    
Розв'язання: Такого сорту приклади обчислюють звичайною підстановкою  
проста границя   
Границя рівна 18/11.   
2. Границі з невизначеністю типу нескінченність розділити на нескінченність. Методи розкриття невизначеності.

Приклад 2. Знайти границю функції   
Розв'язання: Задана границя типу поліном розділити на поліном, причому змінна прямує до нескінченності.  
Проста підстановка значення до якого прямує змінна знайти границю не допоможе, отримаємо невизначеність виду нескінченність розділити на нескінченність.   
Алгоритм обчислення границі полягає у знаходженні найбільшого степеня "ікс" в чисельнику чи знаменнику. Далі на нього спрощують чисельник і знаменник і знаходять границю  
 Оскільки значення http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim9_04.gif прямують до нуля при змінній прямуючій до нескінченності то ними нехтують, або записують в кінцевий вираз у вигляді нулів

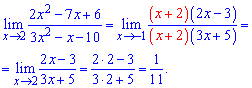
Зразу з практики можна отримати два висновки, які є підказкою в обчисленнях. Якщо змінна прямує до нескінченності і степінь чисельника більший від степені знаменника то границя рівна нескінченності. В протилежному випадку, якщо поліном в знаменнику старшого порядку ніж в чисельнику, границя рівна нулю.   
Формулами границі можна записати так  
  
Якщо маємо в границі звичайний поліном без дробів, то границя теж рівна безмежності  
http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim9_07.gif   
3. Границі з невизначеністю типу 0/0 і методи їх обчислень.

Зразу всі згадують правило, що ділити на нуль не можна. Однак в цьому контексті маємо на увазі нескінченно малі функції.  
Розглянемо для наочності приклад

Приклад 3. Знайти границю функції 

Розв'язання: При підстановці у знаменник x=-1 отримаємо нуль, те ж саме отримаємо в чисельнику. Отже маємо невизначеність типу0/0.   
Боротися з такою невизначеністю просто: потрібно розкласти поліном на множники, а точніше виділити множник, який перетворює все на нуль.  
   
Отже, границю можна записати у вигляді  
   
Ось і вся методика. Так само поступаємо, якщо маємо границі виду многочлен розділити на многочлен.

Приклад 4. Знайти границю функції 

Розв'язання: Пряма підстановка показує, що маємо невизначеність типу 0/0.   
Поділимо поліноми на множник, що дає особливість  
http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim9_13.gif  
http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim9_14.gif   
Є практики, які вчать, що поліноми 2 порядку тобто вигляду "квадратні рівняння" слід розв'язувати через дискримінант. Але моя практика показує, що це довше і заплутаніше, тому позбувайтеся особливості у границі за вказаним алгоритмом. Таким чином записуємо поліноми у вигляді простих множників та підставляємо у границю  
   
Серед завдань на невизначеність типу 0/0 зустрічаються такі, в яких потрібно застосовувати формули скороченого множення. Але якщо Ви їх не знаєте, то діленням многочлена на одночлен можна отримати потрібну формулу

Приклад 5. Знайти границю функції

Розв'язання: Маємо невизначеність типу 0/0. В чисельнику застосовуємо формулу скороченого множення  
формула скороченого множення  
і обчислюємо потрібну границю  
границя функції  
В результаті розкриємо ірраціональність та отримаємо 6.

4.2.4 Метод розкриття невизначеності множенням на спряжене.

Метод застосовують до границь, в яких невизначеність породжують ірраціональні функції. Чисельник або знаменник перетворюється в точці знаходження границі в нуль і невідомо як знайти границю.

Приклад 6. Знайти границю функції

невизначеність границіРозв'язання:   

При підставленні значення отримаємо невизначеність типу 0/0.   
Схема обходу даної особливості полягає у множенні ірраціональності на спряжене. Щоб вираз не змінився, знаменник потрібно помножити на таке ж значення  
обчислення границі   
За правилом різниці квадратів спрощуємо чисельник та обчислюємо границю

обчислення границі

Спрощуємо доданки, що створюють особливість в границі та виконуємо підстановку  
обчислення границі  
В кінці залишиться обчислити корені в знаменнику та спростити дріб.

Приклад 7. Знайти границю функції 

Розв'язання: Границя має особливість виду 0/0.  
невизначеність границі  
Для розкриття множимо і ділимо на спряжене  
знаходження границі   
Записуємо різницю квадратів  
знаходження границі   
Спрощуємо доданки, що вносять особливість та знаходимо границю  
знаходження границі  
Досить гарний прикад на позбуття особливості методом розкриття ірраціональності.

Приклад 8. Знайти границю функції   
Розв'язання: Підставимо двійку в границю.  
Границя функції   
Отримаємо невизначеність 0/0.   
Знаменник потрібно помножити на спряжений вираз, а в чисельнику розв'язати квадратне рівняння. Оскільки відомо, що 2 є коренем, то другий корінь знаходимо з теореми Вієта   
http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim9_27.gif   
Таким чином чисельник запишемо у вигляді   
http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim9_28.gif   
та підставимо у границю  
знаходження границі   
Звівши різницю квадратів позбуваємося особливості в чисельнику і знаменнику  
знаходження границі  
**Домашнє завдання.**

- вивчити методи знаходження границь;

- обчислити границю функції:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1) | 2) |  |
| 3) ; | 4) ; | 5) ; |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 6) | 7) |  |