**Тема: Диференціал. Похідна і диференціал вищих порядків. Застосування диференціала**

1. **Похідна вищих порядків**

Нехай на http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image002.png існує похідна http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image004.png, яка, в свою чергу, є диференційованою на http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image006.png.

**Означення 1.** Похідна від похідної першого порядку, тобто http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image008.png, називається похідною другого порядку або другою похідною функції http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image010.png і позначається http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image012.png, http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image014.png .

Отже, http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image020.png.

Якщо на http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image024.png існує http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image026.png, яка, в свою чергу, є диференційованою на http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image028.png, то похідна третього порядку функції http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image030.png на http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image032.png це http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image034.png.

Аналогічно, похідна четвертого порядку http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image036.png і так далі. Похідна http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image038.png-го порядку функції http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image040.png на http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image042.png

http://lib.lntu.info/book/knit/vm/2011/11-25/rozdil_01/rozd_01_10_files/image044.png.

### Позначення Лагранжа

Позначення Лагранжа одне з найпоширеніших сучасних позначень для диференціювання, що вперше використав [Жозеф-Луї Лагранж](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D0%BE%D0%B7%D0%B5%D1%84-%D0%9B%D1%83%D1%97_%D0%9B%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B6). Для позначення похідної використовують знак [штрих](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%85_(%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D0%BA)), таким чином похідна функції ƒ(x) позначається ƒ′(*x*) чи просто ƒ′ подібним чином друга та третя похідна позначаються

(f')'=f''\,   and   (f'')'=f'''\,.

Починаючи звідси деякі автори застосовують римські цифри:

f^{\mathrm{IV}}\,

для четвертої похідної, тоді як інші автори ставлять цифру порядку похідної в дужки:

f^{(4)}\,

***Приклад 1.*** Знайти похідну другого порядку функції: **3)**http://yukhym.com/images/stories/Diff/Diff6_010.gif

Розв'язок. Обчислимо першу похідну поліному  
http://yukhym.com/images/stories/Diff/Diff6_022.gif  
а потім другу  
http://yukhym.com/images/stories/Diff/Diff6_023.gif

***Приклад*** ***2.*** Знайти похідну 4-го порядку від функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image028.png.

***Приклад*** ***3.***Знайти похідну 2-го порядку від функції  

***Розв’язання:***

Знайдемо

;

.

**2. Поняття диференціалу функції**

Нехай функція http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image036.png має в даній точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1564.png скінченну похідну http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1565.png. Тоді http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1566.png, де http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1567.png, якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image622.png. Звідки

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1568.png.

Якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1401.png - нескінченно малий приріст, то доданок http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1569.png є нескінченно малим вищого порядку, ніж доданок http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1570.png і якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1571.png, то http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1572.png і http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1401.png - нескінченно малі одного порядку.

**Означення 2.**  **Якщо функція http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image036.png має похідну http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1445.png в точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1564.png, то вираз http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1572.png називається *диференціалом* (differential) функції в цій точці і позначається символом http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1573.png.**

Тобто, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1574.png (1)

***Зауваження.*** Диференціал функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image036.png в даній точці є головною лінійною частиною приросту функції, пропорційною приросту аргументу з коефіцієнтом пропорційності http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1445.png:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1575.png.

Диференціал незалежної змінної ототожнюється з її приростом, тобто

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1576.png, оскільки =*dx=x*'=

Для будь-якої диференційованої в точці *х* функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image036.png формулу (1) можна записати так:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1577.png.

Звідки отримаємо, що

**http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1578.png**,

тобто похідну можна розглядати як відношення двох диференціалів.

***Приклад 4.*** Знайти диференціали функцій:

1) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image051.gif;

2) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image053.gif;

3) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image055.gif;

4) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image057.gif.

Ррозв’язання. Застосовуючи правила диференціювання степеневої і логарифмічної функцій, по формулі знаходимо:1) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image059.gif;

2) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image061.gif;

3) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image063.gif;

4) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image065.gif

**Правила знаходження диференціала**

З правил знаходження похідної випливають правила знаходження диференціала. Якщо функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1449.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1450.png диференційовані в точці *х*, то

1) http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1579.png.

2) http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1580.png.

***Зауваження.*** http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1581.png, де http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1466.png.

3) http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1582.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1583.png.

Нехай функція http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image036.png диференційована на проміжку X. Її диференціал

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1577.png

називається також диференціалом першого порядку і його можна розглядати як функцію змінної x(приріст аргументу http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1699.png вважається сталим).

**Означення 3.** Диференціалом другого порядку (second differential) функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image036.png в точці xназивається диференціал від її диференціала першого порядку (за умови, що повторний приріст незалежної змінної x збігається з попереднім http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1699.png) і позначається http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1700.png:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1701.png.

За означенням маємо

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1702.png,

позначають http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1703.png. Таким чином

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1704.png.                                     (2)

Аналогічно, диференціалом n-го порядку (позначається http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1705.png), n=2,3,... називається диференціал від диференціала порядку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1668.png за умови, що в диференціалах весь час беруться одні й ті самі прирости http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1699.png незалежної змінної x. Тобто

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1706.png.

При цьому справедлива формула:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1707.png.                                     (3)

### Позначення Лейбніца

Позначення похідної запропоноване [Лейбніцем](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D2%90%D0%BE%D1%82%D1%84%D1%80%D1%96%D0%B4_%D0%92%D1%96%D0%BB%D1%8C%D0%B3%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BC_%D0%9B%D0%B5%D0%B9%D0%B1%D0%BD%D1%96%D1%86" \o "Ґотфрід Вільгельм Лейбніц) було одним з найперших. Воно широко використовується дотепер. Якщо вираз *y* = *ƒ*(*x*) розглядається як функціональна залежність між залежною і незалежною змінними. Тоді перша похідна позначається як:

\frac{dy}{dx},\quad\frac{d f}{dx}(x),\;\;\mathrm{or}\;\; \frac{d}{dx}f(x),

похідні вищого порядку позначаються таким чином

\frac{d^ny}{dx^n},
\quad\frac{d^n f}{dx^n}(x),
\;\;\mathrm{or}\;\;
\frac{d^n}{dx^n}f(x)

для похідної *n*-го порядку *y* = *ƒ*(*x*) (по змінній *x*). Цє є скорочення для багаторазового застосування оператора похідної. Наприклад,

\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).

***Приклад 5***. Обчислити http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1700.png, якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1708.png.

Розв’язання. Скористаємось формулою (2). Для цього знайдемо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1709.png:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1710.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1711.png.

Отже

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page17_files/image1712.png.

***Застосування диференціала в наближених обчисленнях***

З означення похідної функції в точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1564.png випливає, що її приріст http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1405.png можна подати у вигляді: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1568.png, де http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1567.png, якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image622.png.

Отже, при малих http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1401.png має місце наближена рівність:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1604.png, тобто http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1605.png.

Звідки

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1606.png.                (4)

Формула (4) дозволяє знаходити значення функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image036.png в точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1607.png.

***Приклад 5.*** Наближено обчислити значення http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1624.png.

***Розв’язання.*** В даному випадку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1625.png.

Нехай http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1626.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1627.png, тоді http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1628.png і за формулою (3): http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1629.png, отримаємо, що:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1630.png.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Пример 6.*** | За допомогою диференціала обчислити наближено http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_669.png |
| ***Розв’язання.*** | http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_670.png  Введемо в розгляд функцію http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_671.png, а задану величину представимо у вигляді http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_672.png , тоді  http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_673.png  Обчислимо  http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_674.png  http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_675.png  Підставляючи всі в формулу, остаточно отримаємоhttp://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_676.png |
| **Відповідь** | http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_677.png |

**Домашнє завдання**

1. Знайти другу похідну функції: 1);

2); 3) *у = -5sin5х*.

1. Знайти диференціал першого порядку функції: .
2. Визначити наближене значення функції  у точці х=2,03.