**Тема: Диференціал. Похідна і диференціал вищих порядків. Застосування диференціала**

1. **Похідна вищих порядків**

Нехай на  існує похідна , яка, в свою чергу, є диференційованою на .

**Означення 1.** Похідна від похідної першого порядку, тобто , називається похідною другого порядку або другою похідною функції  і позначається ,  .

Отже, .

Якщо на  існує , яка, в свою чергу, є диференційованою на , то похідна третього порядку функції  на  це .

Аналогічно, похідна четвертого порядку  і так далі. Похідна -го порядку функції  на 

.

### Позначення Лагранжа

Позначення Лагранжа одне з найпоширеніших сучасних позначень для диференціювання, що вперше використав [Жозеф-Луї Лагранж](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D0%BE%D0%B7%D0%B5%D1%84-%D0%9B%D1%83%D1%97_%D0%9B%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B6). Для позначення похідної використовують знак [штрих](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%85_%28%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D0%BA%29), таким чином похідна функції ƒ(x) позначається ƒ′(*x*) чи просто ƒ′ подібним чином друга та третя похідна позначаються

   and   

Починаючи звідси деякі автори застосовують римські цифри:



для четвертої похідної, тоді як інші автори ставлять цифру порядку похідної в дужки:



***Приклад 1.*** Знайти похідну другого порядку функції: **3)**

Розв'язок. Обчислимо першу похідну поліному

а потім другу


***Приклад*** ***2.*** Знайти похідну 4-го порядку від функції .

***Приклад*** ***3.***Знайти похідну 2-го порядку від функції  

***Розв’язання:***

Знайдемо

;

.

**2. Поняття диференціалу функції**

Нехай функція  має в даній точці  скінченну похідну . Тоді , де , якщо . Звідки

.

Якщо  - нескінченно малий приріст, то доданок  є нескінченно малим вищого порядку, ніж доданок  і якщо , то  і  - нескінченно малі одного порядку.

**Означення 2.**  **Якщо функція  має похідну  в точці , то вираз  називається *диференціалом* (differential) функції в цій точці і позначається символом .**

Тобто,  (1)

***Зауваження.*** Диференціал функції  в даній точці є головною лінійною частиною приросту функції, пропорційною приросту аргументу з коефіцієнтом пропорційності :

.

Диференціал незалежної змінної ототожнюється з її приростом, тобто

, оскільки $dy(x\_{0})$=*dx=x*'$∆x$=$∆x$

Для будь-якої диференційованої в точці *х* функції  формулу (1) можна записати так:

.

Звідки отримаємо, що

****,

тобто похідну можна розглядати як відношення двох диференціалів.

***Приклад 4.*** Знайти диференціали функцій:

1) ;

2) ;

3) ;

4) .

Ррозв’язання. Застосовуючи правила диференціювання степеневої і логарифмічної функцій, по формулі знаходимо:1) ;

2) ;

3) ;

4) 

**Правила знаходження диференціала**

З правил знаходження похідної випливають правила знаходження диференціала. Якщо функції ,  диференційовані в точці *х*, то

1) .

2) .

***Зауваження.*** , де .

3) , .

Нехай функція  диференційована на проміжку X. Її диференціал



називається також диференціалом першого порядку і його можна розглядати як функцію змінної x(приріст аргументу  вважається сталим).

**Означення 3.** Диференціалом другого порядку (second differential) функції  в точці xназивається диференціал від її диференціала першого порядку (за умови, що повторний приріст незалежної змінної x збігається з попереднім ) і позначається :

.

За означенням маємо

,

позначають . Таким чином

.                                     (2)

Аналогічно, диференціалом n-го порядку (позначається ), n=2,3,... називається диференціал від диференціала порядку  за умови, що в диференціалах весь час беруться одні й ті самі прирости  незалежної змінної x. Тобто

.

При цьому справедлива формула:

.                                     (3)

### Позначення Лейбніца

Позначення похідної запропоноване [Лейбніцем](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D2%90%D0%BE%D1%82%D1%84%D1%80%D1%96%D0%B4_%D0%92%D1%96%D0%BB%D1%8C%D0%B3%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BC_%D0%9B%D0%B5%D0%B9%D0%B1%D0%BD%D1%96%D1%86%22%20%5Co%20%22%D2%90%D0%BE%D1%82%D1%84%D1%80%D1%96%D0%B4%20%D0%92%D1%96%D0%BB%D1%8C%D0%B3%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BC%20%D0%9B%D0%B5%D0%B9%D0%B1%D0%BD%D1%96%D1%86) було одним з найперших. Воно широко використовується дотепер. Якщо вираз *y* = *ƒ*(*x*) розглядається як функціональна залежність між залежною і незалежною змінними. Тоді перша похідна позначається як:



похідні вищого порядку позначаються таким чином



для похідної *n*-го порядку *y* = *ƒ*(*x*) (по змінній *x*). Цє є скорочення для багаторазового застосування оператора похідної. Наприклад,



***Приклад 5***. Обчислити , якщо .

Розв’язання. Скористаємось формулою (2). Для цього знайдемо :

, .

Отже

.

***Застосування диференціала в наближених обчисленнях***

З означення похідної функції в точці  випливає, що її приріст  можна подати у вигляді: , де , якщо .

Отже, при малих  має місце наближена рівність:

, тобто .

Звідки

.                (4)

Формула (4) дозволяє знаходити значення функції  в точці .

***Приклад 5.*** Наближено обчислити значення .

***Розв’язання.*** В даному випадку .

Нехай , , тоді  і за формулою (3): , отримаємо, що:

.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Пример 6.*** | За допомогою диференціала обчислити наближено http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_669.png |
| ***Розв’язання.***  | http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_670.pngВведемо в розгляд функцію http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_671.png, а задану величину представимо у вигляді http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_672.png , тодіhttp://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_673.pngОбчислимоhttp://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_674.pnghttp://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_675.pngПідставляючи всі в формулу, остаточно отримаємоhttp://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_676.png |
| **Відповідь** | http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_677.png |

**Домашнє завдання**

1. Знайти другу похідну функції: 1);

2); 3) *у = -5sin5х*.

1. Знайти диференціал першого порядку функції: .
2. Визначити наближене значення функції  у точці х=2,03.