**Тема: Площина у 3-х мірному просторі. Рівняння площин. Кут між двома площинами. Пряма і площина у просторі, взаємне розташування.**

1. **Рівняння площини в просторі.**
2. **Загальне рівняння площини**

,

де коефіцієнти **А, В, С** одночасно не дорівнюють нулю.

Окремі випадки:

а)*Ах*+ *Ву*+ *Сz* = 0 – рівняння площини, що проходить через початок координат;

б)*Ах*+ *Ву*+ *D*= 0 – рівняння площини, паралельної осі *Oz*;

в) *Ах*+ *Ву*= 0 – рівняння площини, що проходить через вісь *Oz*;

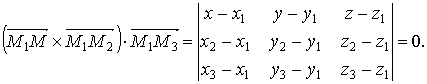
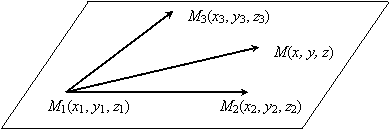
г)*Ах* + *D*= 0, або *x* = – *D*/*A* = *x*0 – рівняння площини, паралельної площині *уОz* (*x* = 0 – рівняння площини *уОz*).

1. **Скалярне рівняння площини**, що проходить через дану точку  в заданому напрямі  має вигляд:

.

Ненульовий вектор , перпендикулярний до площини, називається **нормальним вектором площини**.

1. **Рівняння площини, що проходить через три задані точки***М*1(*х*1, *у*1, *z*1), *M*2(*х*2, *у*2, *z*2), *M*3(*х*3, *у*3, *z*3), що не лежать на одній прямій

        ****

1. Рівняння площини, що відтинає на координатних осях *Ox*, *Oy*, *Oz* не рівні нулю відрізки *a*, *b*, *c*  (***рівняння площини у відрізках на осях***):

http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2069.gif

* **Кут між площинами.** Нехай задані дві площини

http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2677.gif http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2541.gif

Один із кутів http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2515.gif , утворених площинами, рівний куту між їх нормальними векторами http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2680.gif і http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2682.gif . Так як другий кут рівнийhttp://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2684.gif , то кути між площинами можна обчислити за формулою:

http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2686.gif .

Під кутом між площинами розуміють менший з двогранних кутів, утворених цими площинами. Для знаходження гострого кута треба взяти модуль правої частини.

* **Умова паралельності двох площин.**Якщо площини паралельні, то паралельні і їх нормальні вектори http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2688.gif , а отжеhttp://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2690.gif
* **Умова перпендикулярності двох площин.**Якщо площини перпендикулярні, то перпендикулярні і їх нормальні вектори http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2692.gif , а отже

http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2694.gif .

1. **Пряма в просторі. Площина і пряма.**

Пряму в просторі можна розглядати як лінію перетину двох площин, тобто пряма визначається системою двох лінійних рівнянь:

 - загальне рівняння прямої.

**Канонічне рівняння** прямої має вигляд:

,

де  - **напрямний вектор** прямої; **M0(x0;y0;z0)** – точка, яка належить прямій.

Якщо пряма проходить через дві точки **M1(x1;y1;z1)** і **M2(x2;y2;z2)**, її рівняння має вигляд:



* **Умова паралельності** двох прямих має вигляд:



* **Умова перпендикулярності** двох прямих має вигляд: 
* **Кут між прямою і площиною.** Нехай задані площина http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2358.gif і пряма http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2478.gif

Кут http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2515.gif між прямою і площиною рівний http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2820.gif , де http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2822.gif – кут між векторами http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2824.gif і http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2470.gif . Отже, http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2827.gif .

Кут http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2515.gif визначаються за формулою:

http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2829.gif .

* **Умова паралельності прямої і площини.**Для того, щоб пряма і площина були паралельні, необхідно і достатньо, щоб вектори http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2417.gif і http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2492.gif були перпендикулярні, тобто

http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2833.gif .

* **Умова перпендикулярності прямої і площини.**Для того, щоб пряма і площина були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб вектори http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2417.gif і http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2492.gif були колінеарні, тобто

http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2835.gif

**Закріплення матеріалу**

**Приклад 1.**У просторі задані чотири точки *A*1(–1, 2, 3), *A*2(2, 0, 2),  *A*3(3, -2, 4),  *A*4(5, 1, –1).

Необхідно:

    1)  скласти канонічні рівняння прямих *A*1*A*2 і *A*1*A*3;

    2)  знайти кут між цими прямими;

    3)  скласти рівняння площин *A*1*A*2*A*3 і *A*1*A*2*A*4;

    4)  визначити кут між цими площинами;

    5)  знайти рівняння прямої, що проходить через точку *A*4 паралельно прямій *A*1*A*2;

    6)  знайти кут між прямою *A*1*A*3 і площиною *A*1*A*2*A*4;

Розвязання

    1.   Рівняння прямих *A*1*A*2 і *A*1*A*3 знайдемо за формулою рівняння прямої, що проходить через дві точки.

*A*1*A*2: http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2255.gif http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2257.gif http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2259.gif

*A*1*A*3: http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2261.gif http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2263.gif http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2265.gif

    2.  За формулою знаходимо кут між двома прямими (кут між направляючими векторами http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2267.gif http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2269.gif

http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2271.gif

    3.  Рівняння площин *A*1*A*2*A*3 і *A*1*A*2*A*4 складаємо як рівняння площин, що проходять через три задані точки :

*A*1*A*2*A*3: http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2273.gif   http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2275.gif   http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2277.gif= 0   ⟹6*x* + 7*y* + 4*z* – 20 = 0.

*A*1*A*2*A*4: http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2279.gif   http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2281.gif   http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2283.gifhttp://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2285.gif    ⟹    7*x* + 6*y* + 9*z* – 32 = 0.

    4.  Кут між площинами *A*1*A*2*A*3 і *A*1*A*2*A*4 визначаємо як кут між нормалями до них http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2287.gif http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2289.gif

http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2291.gif

    5.  Рівняння прямої, що проходить через точку *A*4 паралельно прямій *A*1*A*2 (паралельно вектору http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2293.gif):

http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2295.gif   http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2297.gif

    6.  Кут між прямою *A*1*A*3 і площиною *A*1*A*2*A*4 визначимо за формулою:

http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image2299.gif.

**Домашнє завдання**

Розв’язати №№299 (Г.Н.Литвиненко. Збірник завдань для атестації з математики учнів 10-11 кл.)