**Тема: Криві другого порядку: коло, еліпс. Зведення загального рівняння до канонічного виду.**

1. **Поняття кривої другого порядку.**

Нехай дане загальне рівняння лінії другого порядку:

*Ax*2 + 2*Bxy* + *Cy*2 + *Dx* *+* *Ey* *+* *K* = 0,

де *A*2 + *B*2 + *C*2 ≠ 0.

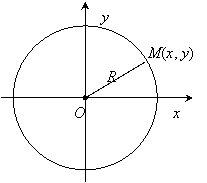
Тип лінії, заданої цим рівнянням, можна визначити за знаком дискримінанта *D* *=* *B*2 - *AC*:

* якщо дискримінант *D* < 0, то рівняння має *еліптичний тип* і визначає або еліпс, або точку (*х*2 *+* *у*2 = 0), або уявну криву (наприклад, *х*2 *+* *у*2 + 1 = 0);
  + якщо дискримінант *D* > 0, то рівняння має *гіперболічний тип* і визначає або гіперболу, або пару прямих, що перетинаються (*а*2*х*2 - *b*2*у*2 = 0);
  + якщо дискримінант *D* = 0, то рівняння має *параболічний тип* і визначає або параболу, або пару паралельних прямих (наприклад, *х*2 - *а*2 = 0), або уявну криву (наприклад, *х*2 + *а*2 = 0).

Лінія 2-го порядку називається *виродженою*,якщо рівняння (4.34) визначає на площині порожню множину, точку, пряму, пару прямих*.* Розглянемо невироджені лінії другого порядку.

1. **Коло**

**Колом** називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини, яка називається центром.

Рівняння кола з центром у початку координат і радіусом R має вигляд:

.

Рівняння кола з центром у точці  і радіусом R має вигляд:

.

**Приклад 1.** Знайдіть рівняння радіуса кола x2 + y2 + 4x + 2y – 32 = 0,

проведеного у точці на ній А(4;-2).

Розв’язання

x2 + y2 + 4x + 2y – 32 = 0, (x+2)2 + (y+1)2 = 37, О(-2; -1),

1. **Еліпс**

**Еліпсом** називається множина точок площини, сума відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала, більша за відстань між фокусами.

Нехай фокуси еліпса розташовані на осі *Ox* у точках *F*1(*c*, 0), *F*2(-*c*, 0), *M*(*x*, *y*) - довільна точка еліпса. Тоді за означенням еліпса

*F*1*M* *+* *F*2*M* = 2*а.*

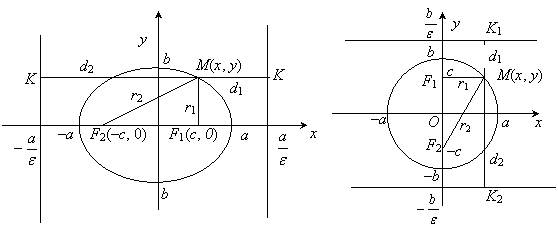
Відстані *r*1 = *F*1*M* і *r*2 = *F*2*M* від довільної точки *М*(*x*, *y*)еліпса до фокусів називаються *фокальними радіусами* точки *М*.

Рис.1 *a* *b*                       Рис.2 *ab*

Канонічне рівняння еліпса має вигляд:

,

де ***а*** – довжина великої півосі; ***b*** – довжина малої півосі .

Залежність між параметрами ***a, b, c*** виражається співвідношенням:

.

**Ексцентриситетом** еліпса називається відношення фокусної відстані ***2с***до великої осі.

Осі координат є осями симетрії еліпса.

Точки перетину еліпса з осями координат (±*а*, 0), (0, ±*b*) називаються *вершинами еліпса*(рис. 1), *а*, *b* - його півосями*.*

Прямі *x* = ± *a*/ *ε* називаються *директрисами* еліпса

***Зауваження 1.***Якщо задані півосі еліпса *а*, *b*, причому *a*  *b*, то його фокуси розташовані на осі *Ox* в точках *F*1(*c*, 0), *F*2(-*c*, 0), де http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image1917.gif, ексцентриситет *ε=* (див. рис. 1).

***Зауваження 2.***Якщо *a* < *b* і http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image1919.gif то фокуси еліпса розташовані на осі *Oy* в точках *F*1(0, *c*), *F*2(0, -*c*), ексцентриситет   
*ε* = *с*/ *b* (рис. 2).

***Зауваження 3.***Рівняння еліпса, осі якого паралельні координатним осям, а центр знаходиться у точці *M*0(*x*0, *y*0), має вигляд:

http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image1923.gif

***Зауваження 4.***При *а* = *b* = *R* еліпс перетворюється в *коло* з центром у початку координат і радіусом *R*.

**Приклад 2.** Звести до канонічного вигляду рівняння 4*x*2 + *y*2 –   
–16*x* - 6*y* +21 = 0. Визначити тип кривої.

Розв’язання

Виділимо в рівнянні повні квадрати:

http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image1925.gif http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image1927.gif

– рівняння еліпса.

Півосі еліпса *a* =1, *b* =2, параметр http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image1933.gif фокуси розташовані на осі *Oy* в точках *F*1(0, http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image1935.gif),   
*F*2(0, -http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image1935.gif), ексцентриситет *ε* = *c*/ *b* = http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2008/865_2008.files/image1938.gif

**Приклад 3.** Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image1346.gif , якщо:

а) відстань між фокусами рівна 24, а велика піввісь рівна 16;

б) відстань між фокусами рівна 8, а ексцентриситет рівний http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3318.gif ;

Розв’язання. а) Щоб скласти рівняння еліпса, треба знайти http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2619.gif і http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image2621.gif . За умовою http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3322.gif і http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3324.gif або http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3326.gif . Із співвідношення http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3328.gif , отримаємо http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3330.gif . Таким чином, шукане рівняння матиме вигляд

http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3332.gif .

б) Так як за умовою http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3334.gif і http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3318.gif , то http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3337.gif і http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3339.gif , звідки http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3341.gif . Із співвідношення http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3328.gif , отримаємо http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3343.gif . Отже, шукане рівняння матиме вигляд

http://konspekta.net/studopediaorg/baza2/204138095244.files/image3345.gif

**Домашнє завдання**

1. Довести, що рівняння 9x2+25y2=225 є рівнянням еліпса. Знайдіть ексцентриситет.
2. Дано еліпс х²/49 + у²/16 = 1. Знайти координати фокуса еліпса.