**Тема: Монотонність, екстремум, опуклість і угнутість функції. Асимптоти функції. Загальна схема дослідження функції.**

1. **Ознака спадання та зростання функції на деякому проміжку.**

За допомогою похідної можна встановлювати проміжки зростання і спадання функції.

Відомо, що функція *y = f(x)* називається **зростаючою** на деякому проміжку, якщо для будь-яких *х1* і *х2*, що належать проміжку, із умови *х2 >х1* випливає, що *f(x2) > f(x1)*.

Дотична в кожній точці графіка зростаючої функції, як видно з рис. 1, утворює з додатним напрямом осі ОХ або гострий кут, або кут, що дорівнює нулю (в останньому випадку дотична паралельна осі ОХ).

Виходячи із геометричного змісту похідної: *tg* α *= f’(xo),* це означає, що похідна в кожній точці проміжку невід’ємна, тому для зростаючої функції *f(x)* виконується умова: .

Функція *y = f(x)* називається **спадною** на проміжку, якщо для будь-яких *х1* і *х2*, що належать цьому проміжку, із умови *х2 >х1* випливає, що *f(x2) < f(x1)*. Дотична в кожній точці графіка спадної функції (рис. 2) утворює з віссю *ОХ* або тупий кут, або кут, що дорів­нює нулю, тому для функції *f(x),* яка спадає на деякому проміжку, вико­нується умова *f'(x) < О.*

Ознака зростання (спадання) функції

**Якщо *f'(x)* > 0 на проміжку, то функція *f(x)* зростає на цьому проміжку.**

**Якщо *f(x)* < 0 на проміжку, то функція *f(x)* спадає на цьому проміжку.**

Ці два твердження називаються ознака­ми зростання (спадання) функції на про­міжку.

Проміжки зростання і спадання функції часто називають про­міжками монотонності цієї функції.

**Алгоритм знаходження проміжків зростання та спадання функції**

1. Знайти область визначення заданої функції *у = f(x).*

2. Знайти похідну *f'(x).*

3. Розв'язати нерівності:

а) *f'(x) >* 0, указати проміжки зростання функції *у = f(x);*

б) *f'(x)* < 0, указати проміжки спадання функції *у* = *f(x)·*

***Приклад 1.*** Знайдіть проміжки монотонності функції *у* = *х3 - 3х2.*

# Розв'язання

1*.* Область визначення функції: *D(y)* = *R.*

2*.* Знаходимо похідну *у' = 3х2 -**6х.*

3*.* Розв'язуємо нерівності: а) *у' >* 0; б) *у' < 0.* Розв'язуємо ці не­рівності методом інтервалів, для цього знаходимо нулі по­хідної: 3*х2 - 6х = 0, 3х(х - 2)* = 0, *х* = 0 або *х* = 2. Наносимо на координатну пряму (рис. 3) нулі похідної і ви­значаємо знаки похідної на кожному проміжку:

*y'(-1) = 3 · (-1)2 - 6 · (-1) = 3 + 6 = 9 > 0;*

*y'(1) = 3* · *І2 – 6 - 1 = -3 < 0;*

*у'(3) = 3* · *32 – 6* · *3 = 27 - 18 = 9 > 0.*

*а) у' > 0* в кожному із проміжків *(-**; 0); (2;* +), отже, функція на цих проміжках зростає.

б) *у' < 0* на проміжку (0; 2), отже, функція на цьому проміжку спадає.

*Відповідь:* функція зростає на кожному із проміжків (-;0)**;**(2;+); спадає на проміжку (0; 2).

# Поняття точок екстремуму та екстремуму функції.



***Означення.*** Точка *а* із області визначення функції *f(x)* називаєть­ся точкою максимуму **(*хmax)*** цієї функції, якщо існує та­кий окіл точки *а,* що для всіх *х а* із цього околу виконується нерівність *f(x) < f(a).* (Рис. 4).

***Означення.*** Точка *b* із області визначення функції *f(x)* називаєть­ся точкою мінімуму **(*хmin)***цієї функції, якщо існує такий окіл точки *b,* що для всіх *х  b* із цього околу вико­нується нерівність *f(x) < f(b).* (Рис. 5).

**Точки максимуму і точки мінімуму називають точ­ками екстремуму функції, а значення функції в цих точках називають екстремумами функції (максимум і мінімум функції).**

Точки максимуму позначають *хmax ,* а точки мінімуму — *хmin .* Значення функції в цих точках, тобто максимуми і мінімуми функції, позначаються відповідно: *уmax* і *уmin*.

1. **Необхідна умова екстремуму, поняття стаціонарної і критичної точки.**

Розглянемо функцію *у = f(x),* яка визначена в деякому околі точки *xo* і має похідну в цій точці.

**Якщо *xo —* точка екстремуму диференційованої функції *у* = *f(x),* то *f’(хo) = 0.***

Це твердження називають теоре­мою Ферма на честь П'єра Ферма (1601—1665) — французького мате­матика.

Слід зазначити, що якщо *f’(хo) = 0,* то *хo* не обов'язково є точкою екстремуму.

Наприклад, якщо *f(x)* = *х3,* то *f`(x) = 3x2* і *f`(хo) = 0*. Проте точка *х* = 0 не є точкою екст­ремуму, оскільки функція *f*(*x*) = *x*3 зростає на всій числовій осі (рис. 6).

Отже, точки екстремуму диференційованої функції треба шукати тільки серед коренів рів­няння *f’(x) =* 0, але не завжди корінь рівнян­ня *f’(x)* = 0 є точкою екстремуму.

Точки області визначення функції, в яких похідна функції дорівнює нулю, називаються **стаціонарними точками функції**.

Точки області визначення функції, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називаються **критичними точками функції**.

Отже, для того щоб точка *хo* була точкою екстремуму, необ­хідно, щоб вона була критичною.**Якщо похідна ліворуч стаціонарної точки додатна, а праворуч — від'ємна, тобто при переході через цю точку по­хідна змінює знак з «+» на «–»*,* то ця стаціонарна точка є точкою максимуму**.

Дійсно, в цьому випадку ліворуч критичної точки функція зростає, а праворуч — спадає, отже, дана точка є точка максимуму.

**Якщо похідна ліворуч критичної точки від'ємна, а праворуч — додат­на, тобто при переході через критичну точку похідна змінює знак з «–» на «+», то ця критична точка є точка мінімуму**.

Якщо при переході через критичну точку похідна не змінює знак, тобто ліворуч і праворуч від критичної точки похідна додатна або від'ємна, то ця точка не є точкою екстремуму.

***Приклад 2.*** Знайдіть екстремуми функції *f(x)* = *х4 - 4х3.*

## Розв'язання

Область визначення функції — *R.*

Знайдемо похідну:

*f`(x)=* (*x4* – *4х3*) = 4*x*3 – 12*х2* = 4*x*2(*х* – 3).

Знайдемо критичні точки: *f`(x)* = 0, 4*x*2(*x* – 3) = 0, *x* = 0 або *х =* 3.

Наносимо критичні точки на координатну пряму (рис. 7) та визначаємо знак похідної на кож­ному інтервалі.

*x = 3 —* точка мінімуму, бо при переході через цю точку похідна змінює знак з «–» на «+»: *хmin*= 3.

Точка *x =* 0 не є точкою екстремуму, бо похідна не змінює знак при переході через цю точку.

Отже, *уmin* = *f*(3) = 34 – 4 · 33 = – 27.

*Відповідь:* *уmin* = *f*(3) = – 27.

***Приклад 2.*** Знайдіть екстремуми функції *f(x)* = *х4 - 4х3.*

## Розв'язання

Область визначення функції — *R.*

Знайдемо похідну:

*f`(x)=* (*x4* – *4х3*) = 4*x*3 – 12*х2* = 4*x*2(*х* – 3).

Знайдемо критичні точки: *f`(x)* = 0, 4*x*2(*x* – 3) = 0, *x* = 0 або *х =* 3.

Наносимо критичні точки на координатну пряму та визначаємо знак похідної на кож­ному інтервалі.

*x = 3 —* точка мінімуму, бо при переході через цю точку похідна змінює знак з «–» на «+»: *хmin*= 3.

Точка *x =* 0 не є точкою екстремуму, бо похідна не змінює знак при переході через цю точку.

Отже, *уmin* = *f*(3) = 34 – 4 · 33 = – 27.

*Відповідь:* *уmin* = *f*(3) = – 27.

# Опуклість і угнутість кривої

Гладка проста крива у = f (х) наз. **опуклою (угнутою)** в деякому інтервалі, якщо в цьому інтервалі вона лежить не нижче (не вище) дотичної прямої в кожній своїй точці. Точка, в якій опуклість кривої переходить в угнутість (чи навпаки), наз. точкою перегину. Так, крива у = sin х опукла в інтервалі (π, 2π), угнута в інтервалі (0, π), х = π — її точка перегину. Якщо функція f (х) двічі диференційовна, то при **f"(х) > 0 крива опукла, а при f"(х) < 0 — угнута**. Приf"(х) = 0 необхідне додаткове дослідження

1. **Сприймання і усвідомлення загальної схеми дослідження функції і побудови її графіка.**

**Алгоритм дослідження функції і побудову її графіка**

1. Знаходимо область визначення функції.

2. Знаходимо точки перетину графіка з координатними осями.

3. З'ясовуємо парність (непарність), періодичність функції.

4. Знаходимо похідну та критичні точки.

5. Знаходимо проміжки зростання, спадання, точки екстремуму та екстремальні значення функції.

6. Знаходимо другу похідну та критичні точки ІІ роду, знаходимо проміжки опуклості, угнутості.

7. З'ясовуємо поведінку функції на кінцях області визначення.

Пряма х = А є вертикальною асимптотою, якщо границя цієї функції дорівнює нескінченності при аргументі, що прямує до А.

Пряма у = В є горизонтальною асимптотою, якщо границя цієї функції дорівнює числу В при аргументі, що прямує до нескінченності.

Пряма y = kx + b є похилою асимптотою, якщо границя відношення функції до її аргументу дорівнює числу k при аргументі, що прямує до нескінченності і якщо границя різниці функції і kx дорівнює числу b при аргументі, що прямує до нескінченності

8. На підставі проведеного дослідження будуємо графік функції.

Слід мати на увазі, що не завжди треба чітко виконувати вказаний план. Наприклад, не завжди ми зможемо знайти точ­ки перетину графіка з віссю *ОХ* (тобто нулі функції), навіть, якщо вони і існують. Інколи додатково знаходять координати деяких точок.

***Приклад 1.*** Дослідіть функцію *f(x)* = *х3 - 3х2 і* побудуйте її графік.

# Розв'язання

1. *D(f)= R.*

2. Знайдемо абсциси точок перетину графіка з віссю *ОХ:*

*x3 - 3х2* = 0; *х2*(*х -* 3) = 0; *х =* 0 або *х =* 3.

Знайдемо ординату точки перетину графіка з віссю ΟΥ:

*у =* 03 - 3 · 02 = 0.

3. Оскільки *f(-x) = (-x)3 -* 3(-*х*)2 = *-x3 - 3х2,* то функція не є парною, не є непарною. Функція неперіодична.

4. Знайдемо похідну *f'(x)* = 3*х*2 – 6*х* = 3*х*(*х* - 2). D(*f’*) = R. Знайдемо критичні точки:

*f'(x)* = 0; 3*х*(*x* *- 2) = 0; х = 0* або *х = 2.* Критичні точки розбивають коор­динатну пряму на три проміжки: (-; 0), (0; 2), (2; +).

5. Складемо таблицю:



6.Знайдемо другу похідну *f´´(x)=6х-6, 6х-6=0, х=1- критична точка ІІроду.*



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | *(-*$\infty ;$*1)* | *1* | *(1;+*$ \infty $*)* |
| *f´´(x)* | *+* | *0* | *-* |
| *f(x)* | *угнута* |  | *опукла* |

6. Використовуючи результати дослі­дження, будуємо графік функції *у* = *х3 - Зх2* (рис.8).

**Домашнє завдання**

1. Дослідите функцію  на опуклість та точки перегину
2. Дослідите функцію та побудувати графік.