**Тема: Геометричний, фізичний та економічний зміст похідної**

1. **Фізичний зміст похідної**

Похідна функції має такий **фізичний зміст**: похідна функції в заданій точці – швидкість зміни функції в заданій точці.

Якщо матеріальна точка рухається прямо­лінійно і її координата змінюється по закону s = s(*t*), то швидкість її руху *v(t)* в момент часу *t* дорівнює похідній *s'(t):*

*v(t)* = *s'(t).*

**Виконання вправ**

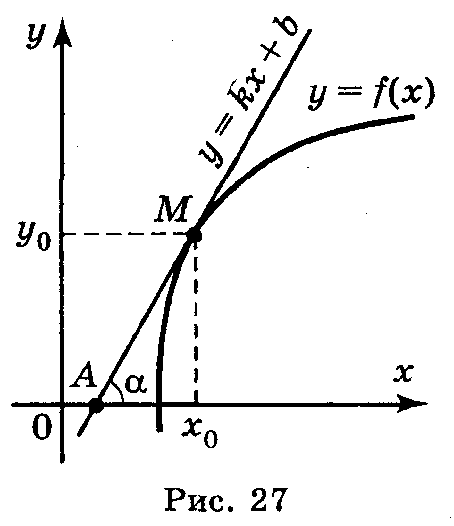
1. Точка рухається по закону *s(t)* = 1 + *2t2* (м). Знайдіть швид­кість руху точки в момент часу *t* = 1 с.

*Відповідь:* 4 .

2. Знайдіть миттєву швидкість руху точки, якщо:

a) s(*t*) = 3*t +* 1; б) *s(t) =* 3 – *2t;* в) *s(t)=t2·,* г)s(*t*) = *3t2.*

*Відповідь:* а)3**;** б) -2; в) 5*t*; г) 6*t*.



1. **Геометричний зміст похідної**

**Значення похідної функції *у* = *f(x)* в точці *xo* до­рівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою *xo : f'(xo)* = *k* = tg α** (рис. 27)

Розглянемо функцію *у* = *f(x)*. Її гра­фік зображено на рис. 27.

У точці М(*xo;yo*) проведено дотичну до кривої *у=f(x).* Складемо рівняння дотичної *AM,* знаючи координати точки М(*xo;yo*) дотику і рівняння *у = f(x)* кри­вої. Дотична — це пряма. Рівняння будь-якої прямої має вигляд: *у* = *kx + b.* Оскільки *k* = *f'(xo)*, тому рівняння дотичної має вигляд:

*у* = *f'(xo)x + b.* (1)

Знайдемо *b,* виходячи з того, що дотична проходить через точку М(*xo;yo*) і тому її координати задовольняють рівнянню дотичної:

*уо* = *f '(хo)* · *хo + b,* звідси *b* = *уo – f '(xo)* · *xo*.

Тепер підставимо значення *b* в рівняння (1) дотичної і одер­жимо:

*у = f '(xo) ·x + уо – f '(xo) · xo y – yо = f '(xо )(x – xo)·*

Отже, ***рівняння дотичної до кривої у = f(x)* в точці *М(xo; уo)* має вигляд:**

***y – yо = f '(xo)(x – xo).*** (2)

**Рівняння дотичної до кривої *у = f(x)* у заданій точці *xo* можна знаходити за таким планом (схемою):**

1. Записуємо рівняння (2) дотичної: *y – yо = f '(xo)(x – xo).*

2. Знаходимо *уo* = *f(xo)·*

3. Знаходимо значення *f '(x) у* точці *xo: f '(xo).*

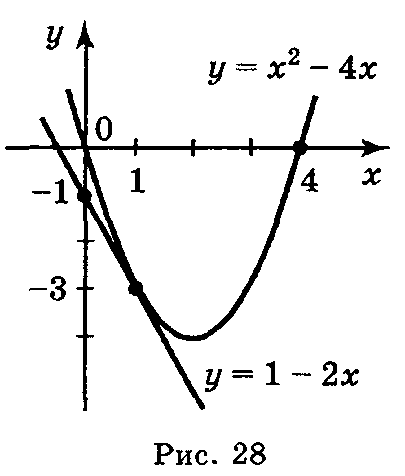
4. Підставляємо значення *xo,* *yo* і *f '(xo)* y рівняння (2).

**Для нормалі, тобто прямої, що проходить через точку дотику перпендикулярно до дотичної, рівняння має вигляд**

**http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/4.32D6?OpenElement&FieldElemFormat=gifhttp://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/4.3FA8?OpenElement&FieldElemFormat=gif**

***Приклад 1.*** Складіть рівняння дотичної і нормалі до графіка функції *у* = *х*2 - *4х* в точці *xo* = 1. Виконайте схематичний рисунок.

### Розв'язання

1. *y - yо = f '(xo)(x – xo)* — рівняння шуканої дотичної.
2. *уo=* 1*2 –* 4·1 = 1 – 4 = - 3.
3. .

4. Підставляємо значення *xo* = 1, *yo* = –3, *f'(xo)* = –2 у рівняння дотичної: *y* + 3 = –2(*x* – 1), або *у* = – 3 – 2*x* + 2, або *y* = –1 – 2*х* (рис. 28).

#### Виконання вправ.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Дотична до графіка функції *у* = *f(x)* у точці з абсцисою *xo* утворює з додат­ним напрямом осі *ОХ* кут 45°. Знайдіть *f'(xо).*

*Відповідь:* 1.

2. Відомо, що тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції *у = f(x)* в точці з абсцисою *хo* = –1 дорівнює 3. Запишіть рів­няння дотичної до графіка функції в цій точці, якщо *f(xo)* = 2.

*Відповідь: у* = 3*x +* 5.

3. Який кут (гострий чи тупий) утворює з додатним напрямом осі *ОХ* дотична до графіка функції: а) *у = х*2 *+ 2х* в точці *x =* 1; б) *у = х2 + 2х* в точці *x = -*27

*Відповідь:* а) гострий; б) тупий.

4. Запишіть рівняння дотичної до параболи *у* = 3*х2* - 2 у точці:

а) *xo* = -2; б) *xo =* 0; в) *xo =* 1*.*

*Відповіді:* а) *у* = - 12*х* - 14; б) *у = -*2; в) у = 6*х* - 5.

1. **Економічний зміст похідної**

Під фізичним змістом похідної розуміють швидкість зміни функції в цій точці. У зв’язку з цим можна визначити **економічний зміст похідної як швидкість зміни деякого економічного процесу.**

Враховуючи, що похідна функції http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/6.D8E?OpenElement&FieldElemFormat=gif – це http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/6.148C?OpenElement&FieldElemFormat=gifhttp://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/6.1C3E?OpenElement&FieldElemFormat=gif, і вважаючи, що витрати http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/6.2438?OpenElement&FieldElemFormat=gif виробництва є функцією кількості http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/6.29A2?OpenElement&FieldElemFormat=gif однорідної продукції, що виробляється, знаходимо середній приріст витрат на одиницю продукції як http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/6.3010?OpenElement&FieldElemFormat=gif, де http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/6.36DC?OpenElement&FieldElemFormat=gif – приріст витрат виробництва, а http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/6.3D1C?OpenElement&FieldElemFormat=gif – приріст продукції. Тоді похідна http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/6.4354?OpenElement&FieldElemFormat=gifhttp://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/6.4B06?OpenElement&FieldElemFormat=gif виражає граничні витрати виробництва.

***Приклад*** *.* На основі досліджень отримали функцію прибутку від ціни *p*за одиницю продукції: http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/7.86E?OpenElement&FieldElemFormat=gif. Яким буде граничний прибуток фірми залежно від ціни для значень: http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/7.126A?OpenElement&FieldElemFormat=gifhttp://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/7.1902?OpenElement&FieldElemFormat=gifhttp://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/7.1F76?OpenElement&FieldElemFormat=gif?

***Розв’язання****.* Згідно з економічним значенням похідної граничний прибуток буде визначатися похідною http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/7.277A?OpenElement&FieldElemFormat=gif:

http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/7.2FB2?OpenElement&FieldElemFormat=gif

Звідки http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/7.39F8?OpenElement&FieldElemFormat=gifhttp://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/7.4340?OpenElement&FieldElemFormat=gifhttp://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/7.4BF0?OpenElement&FieldElemFormat=gif

Отже, при збільшенні ціни одиниці продукції до 5 (http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/8.8A2?OpenElement&FieldElemFormat=gif) прибуток зростатиме і найбільшим буде при http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/8.F8C?OpenElement&FieldElemFormat=gif:http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/8.16BE?OpenElement&FieldElemFormat=gif.

При збільшенні ціни, починаючи з http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/8.1F2C?OpenElement&FieldElemFormat=gif, прибуток фірми зменшуватиметься. Отже, знак мінус у похідної http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/lspace/matemat_udec_demo/schedule.nsf/d862e82eafb758368525663c004f385c/270feb5afb20562fc2256d82004ec604/Body/8.262C?OpenElement&FieldElemFormat=gif вказує, що виробництво стане

менш прибутковим порівняно з оптимальним варіантом.