**Тема: Розширення поняття множини дійсних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа. Степінь уявної одиниці.**

1. **Розширення поняття множини дійсних чисел.**

У багатьох розділах математики та її застосуваннях неможливо обмежитись розглядом лише дійсних чисел. Вже досить давно під час розв’язування різних задач виникла потреба добувати квадратний корінь з від’ємних чисел. Щоб ця дія стала можливою, ввели множину нових чисел.

1. **Означення комплексного числа і уявної одиниці**

Число a+bi, де a і b – будь-які дійсні числа, i – уявна одиниця, називається **комплексним числом** (a – дійсна частина, bi – уявна частина комплексного числа, а b – коефіцієнт при уявній частині).

Число, квадрат якого дорівнює -1, позначають буквою i і називають **уявною одиницею** (i – перша буква латинського слова imaginarius – уявний).

Тобто, для символу i виконується рівність

i•i=i^2=-1.

Запис a+bi називають **алгебраїчною формою комплексного числа**.

**Примітка!** Слово "комплексний" означає складений.

Часто комплексне число позначають буквою z і записують z=a+bi.

Комплексні числа – це розширення числової системи дійсних чисел. Позначаються вони буквою C

**Множина дійсних чисел є частиною (підмножиною) множини комплексних чисел.**

Для комплексних чисел означені алгебраїчні операції додавання та множення, які узагальнюють додавання та множення дійсних чисел із зберіганням властивостей асоціативності, комутативності та дистрибутивності.

**Які комплексні числа називаються рівними, спряженими, протилежними?**

Два комплексних числа a+bi і c+di **рівні між собою** тоді і тільки тоді, коли a=c і b=d, тобто, коли рівні їх дійсні частини і коефіцієнти при уявних частинах.

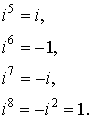
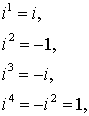
Поняття "більше" і "менше" для комплексних чисел не має смислу. **Ці числа за величиною не порівнюють.** Тому не можна, наприклад, сказати, яке з двох комплексних чисел більше 10i чи 3i, 2+5i чи 5+2i.

Числа a+bi і a-bi, дійсні частини яких рівні, а коефіцієнти при уявих частинах рівні за модулем, але протилежні за знаком, називають**спряженими**.()

**Приклад.**

1. Спряженими є комплексні числа 4+3i та 4-3i.
2. Якщо дано число 6i, то спряженим до нього є -6i.
3. До числа 11 спряженим буде 11, бо 11+0i=11-0i.

Числа a+bi і –a-bi називаються протилежними. Тобто, два числа a+bi та –a-bi, сума яких дорівнює нулю, називають**протилежними**.

1. Степені уявної одиниці.   
     
   Піднесення уявної частини числа до степеня з натуральним показником http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_022.gif:  
   **http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_023.gif**,якщо http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_024.gif ділиться на 4 без остачі, **n=4k;  
   http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_025.gif**, якщо http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_026.gif ділиться на 4 з остачею 1, **n=4k+1;  
   http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_027.gif**, якщо http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_028.gif ділиться на 4 з остачею 2, **n=4k+2;  
   http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_029.gif**, якщо http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_030.gif ділиться на 4 з остачею 3, **n=4k+3.**

Обчислити:

1. **Дії над комплексними числами.**

Нехай дано два комплексні числа z_1=a_1+b_1 i і z_2=a_2+b_2 i.

**а) Додавання комплексних чисел.**

**Сумою двох комплексних чисел** a_1+b_1 i і a_2+b_2 i називається комплексне число (a_1+a_2 )+(b_1+b_2 )i, дійсна частина якого і коефіцієнт при уявній частині дорівнюють відповідно сумі дійсних частин і коефіцієнтів при уявних частинах додатків.

**Приклади (додавання комплексних чисел):**

1. (–3+5i)+(4-8i)=(-3+4)+(5-8)i=1-3i
2. (3+2i)+(-1-5i)=(3-1)+(2-5)i=2-3i
3. (2+3i)+(6-3i)=(2+6)+(3-3)i=8-0i=8
4. (10-3i)+(-10+3i)=(10-10)+(-3+3)i=0-0i=0

**Примітка!** Означення суми комплексних чисел поширюється і на випадок трьох і більше доданків.

**б) Віднімання комплексних чисел.**

**Різницею двох комплексних чисел** a_1+b_1 i і a_2+b_2 i називається комплексне число (a_1-a_2 )+(b_1-b_2 )i.

**Приклади (віднімання комплексних чисел):**

1. (-5+2i)-(3-5i)=(-5-3)+(2-(-5) )i=-8+7i
2. (6+7i)-(6-5i)=(6-6)+(7+5)i=12i
3. (0,3+2,5i)-(-0,75+1,5i)  =(0,3+0,75)+(2,5-1,5)i=1,05+i

**в) Множення комплексних чисел.**

**Добутком двох комплексних чисел** a_1+b_1 i і a_2+b_2 i називається комплексне число (a_1 a_2-b_1 b_2 )+(a_1 b_2+b_1 a_2 )i.

Приклад (множення комплексних чисел):

(1-2i)•(3+2i)=(1•3-(-2)•2)+(1•2+(-2)•3)i=

=(3+4)+(2-6)i=7-4i.

**Добуток двох спряжених комплексних чисел:**

(a+bi)•(a-bi)=a^2+b^2.

**г) Ділення комплексних чисел.**

**Часткою комплексних чисел** a_1+b_1 i і a_2+b_2 i називається комплексне число

(a_1 a_2+b_1 b_2)/(a_2^2+b_2^2 )-(a_1 b_2-b_1 a_2)/(a_2^2+b_2^2 ) i.

**Приклад (знайти частку комплексних чисел):**

(7-4i)/(3+2i)=(7-4i)(3-2i)/(3+2i)(3-2i) =(13-26i)/13=1-2i.

**Властивості дій над комплексними числами в алгебраїчній формі**

1. Комутативний закон додавання:   
http://ua-referat.com/dopb222443.zip .   
2. Асоціативний закон додавання:   
http://ua-referat.com/dopb222444.zip .   
3. Комутативний закон множення:   
http://ua-referat.com/dopb222445.zip .   
4. Асоціативний закон множення:   
http://ua-referat.com/dopb222446.zip .   
5. Дистрибутивний (розподільний) закон множення відносно додавання:   
http://ua-referat.com/dopb222447.zip .   
6. http://ua-referat.com/dopb222448.zip .   
7. http://ua-referat.com/dopb222449.zip .   
8. http://ua-referat.com/dopb222450.zip . 

**Приклад 1.** Обчислити значення виразів

1) http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_031.gif  
2) http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_032.gif  
3) http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_033.gif  
4) http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_034.gif  
якщо http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_035.gif

Розв'язок. Основні операції з комплесними числами, це як основа основ даній теорії тому спробуйте розібратися з правилами з першого разу та в майбутньому не мати проблем з обчисленнями.

1) Проведемо додавання та віднімання згідно правил  
http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_036.gif  
http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_037.gif

2) Спряженим до числа http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_038.gif буде http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_039.gif  
Обчислимо добуток перших двох чисел  
http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_040.gif  
http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_041.gif  
Обчислимо добуток отриманого числа на http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_042.gif  
http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_043.gif  
http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_044.gif  
Отже, шуканий добуток буде рівний *65-13i*

http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_045.gif

3) Виконаємо ділення компексних чисел за формулою  
http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_046.gif  
В результаті отримали число, яке має тільки уявну частину.

4) Спочатку підносимо число *z3* до квадрату  
http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_048.gif  
Тепер виконаємо ділення  
http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_049.gif  
http://yukhym.com/images/stories/Complex/Com1_050.gif  
При обчисленнях будьте уважні і слідкуйте за знаками, як правило, неуважність є причиною більшості помилок при роботі з омплесними числами. Правила піднесення до степеня уявної частини прості і, розв'язавши необхідну кількість подібних прикладів, Ви їх засвоїте без особливих зусиль.

**Домашнє завдання**

* Вивчити конспект
* Знайти для кожного з комплексних чисел протилежне, спряжене, їх суму, різницю, добуток і частку:
* Знайти степінь уявної одиниці: