**Тема №1: Основні поняття диференціальних рівнянь.**

1. Мотивація

До сьогоднішнього уроку ми розглядали рівняння, в яких не­відомими були числа. В математиці приходиться розглядати рівняння, в яких невідомими є функції. Так задача про знахо­дження шляху *S(t)* за заданою швидкістю *v(t)* зводиться до розв'я­зування рівняння *S(t)* = *v*(*t*), де *v*(*t*) — задана функція, a S(*t*) — шукана функція. Наприклад, якщо *v(t)* = 3 – 4*t*, то для знахо­дження *S(t)* треба розв'язати рівняння *S'(t)* = 3-4*t*.

Це рівняння містить похідну невідомої функції. Такі рівнян­ня називаються диференціальними рівняннями.

# Історична довідка.

У кінці XVII — на початку XVIII ст. різноманітні практичні і наукові проблеми привели до появи диференціальних рівнянь. Насам­перед це були диференціальні рівняння першого порядку, інтегруван­ня яких намагалися здійснити за допомогою функцій, що виражають скінченне число алгебраїчних дій або таких, що включають елементарні неалгебраїчні дії, наприклад оперування тригонометричними функ­ціями.

Найпростіші диференціальні рівняння з'явилися вже в працях Ісаака Ньютона (1643—1727) і Готфріда Лейбніца (1646—1716). Саме Лейбніцу і належить термін «диференціальне рів­няння». Диференціальні рівняння мають велике прикладне значення, вони є знаряддям дослідження багатьох задач природознавства і тех­ніки, їх широко використовують в механіці, астрономії, фізиці, у ба­гатьох задачах хімії, біології. Це пояснюється тим, що досить часто об'єктивні закони, яким підпорядковуються певні явища (процеси), записують у формі диференціальних рівнянь, а самі ці рівняння є за­собом для кількісного вираження цих законів.

Наприклад, фізичні закони описують деякі співвідношення між ве­личинами, що характеризують певний процес, і швидкістю зміни цих величин. Іншими словами, ці закони виражаються рівностями, в яких е невідомі функції та їх похідні.

1. **Поняття диференціального рівняння, його порядок**

***Означення 1.***  Рівняння, що містить незалежну змінну, шукану функцію та її похідні називається диференціальним рівнянням (наявність похідних тут обов’язкова).

Такі рівняння мають вигляд

***Означення 2.*** Найбільший порядок похідної, яка входить в диференціальне рівняння називається порядком диференціального рівняння.

***Означення 3.***  При  диференціальне рівняння називається диференціальним рівнянням першого порядку і записується таким чином

.

Наприклад,

а) у '+2у = sinx - рівняння I порядку;

б) у"+ytgx = 0 -рівнянняII порядку; в) у "'+у "=уу'- рівняння III порядку

***Означення 4.*** Розв’язком диференціального рівняння називають будь-яку функцію, яка при підстановці її в рівняння перетворює його в тотожність

Розв 'язки диференціальних рівнянь шукають за допомогою інтегрування.

Наприклад:

а) розв'язком диференціального рівняння I порядку

у'- 2х = 0 є:

у = х2 +С.

3 наведеного прикладу видно, що диференціальні рівняння мають не один, a безліч розв'язків, які визначені з точністю до постійних.

Доведено, що розв 'язки рівняння n-го порядку залежать від п довільних сталих

с1, с2, ... сn.

***Означення 5.*** Загальним розв’язком (загальним інтегралом) диффенціального рівняння називають таку функцію, яка перетворює дане рівняння в тотожність і містить стільки незалежних довільних сталих, який порядок цього рівняння.

у=(х, с1, с2,…сn)

Процес знаходження загальногорозв’язку називають інтегруванням диференціального рівняння.

Геометрично, загальному розв’язку диференціального рівняння відповідає сукупність (сімейство) всіх інтегральних кривих.

Початковими умовами називаюгь значення функції та її похідних в заданій точці х .

***Означення 6.*** Розв’язок диференціального рівняння, який задовільняє заданим початковим умовам називають частковим розв’язком, а задачу знаходження часткового розв’ язку - задачею Коші.

Розв’язати задачу Коші з геометричної точки зору означає знайти серед усіх інтегральних кривих диференціального рівняння ту, яка проходить через задану точку .

**Теорема Коші про існування і єдиність розв'язку задачі Коші**. Нехай y' = f(x, y) - деяке диференційне рівняння першого порядку, і f(x, y) є неперервною в деякій відкритій області G, і похідна також є неперервною на G. Тоді \forall (x_0,y_0) \in G розв'язок задачі Коші існує і він єдиний у цій області.

1. Типи диференціальних рівнянь першого порядку, розв′язаних відносно похідної

* **Неповні рівняння.**

а) Диференціальне рівняння, яке не містить шуканої функції

має вигляд

 , .

Припустимо, що *f(x)* являється неперервною функцією на . Тоді функція



є загальним розв`язком даного диференціального рівняння в області

*a < x < b, -< y < + .*

***Приклад 1.*** Розв'яжіть диференціальне рівняння *у'=2х+1.*

# Розв'язання

Треба знайти функцію *у(х),* похідна якої дорівнює *2х* + 1, тобто, знайти первісну функції *2х +* 1. Отже

*у* = *= x2 + x* + С, де С — довільна постійна.

*Відповідь: у* = *x*2 + *x + С.*

Розв'язок диференціального рівняння визначається неодноз­начне, з точністю до постійної. Як правило до диференціального рівняння додається умова, із якої ця постійна визначається.

***Приклад 2.*** Знайдіть розв'язок диференціального рівняння *у'* = *sin x*, що задовольняє умові *у*(0) = 0.

# Розв'язання

Знайдемо всі розв'язки цього рівняння:

*у =*  *= – cos x + С.*

Із умови *у(0)* = 0 маємо 0 = – cos 0 + С; С = 1. Отже, розв'язком даного рівняння, що задовольняє умові

*у*(0) = 0 є *у* = 1- cos *x.*

*Відповідь: у* = 1- *cos x.*

* **Виконання вправ**

1. Розв'яжіть диференціальні рівняння:

а) *у'* = 4 - 3*х;* б) *у' = x2 - 5х* + 6; в) *у' = 5e2x*; г) *у*' = 5cos3*х*;

д)  *у'* = cos *x +* sin *χ;* є)  *у' = +*·

*Відповідь:* а*) у =4.х - х2 + С;* б) *y* =  –  + *6х* + С; в) *y* = + С; г) *y* = -sin3*x* + C; д) *у =* sin *x - cos x + С;* є) *у = tg x – ctg x* + С.

2. Знайдіть розв'язки диференціального рівняння, які задоволь­няють умові:

а) *y*' = cos *x*, *y*(0) = 0; б) *у’ = еx+ е-x;* *у*(0) = 0;

в) *у'* = 3 sin 3*х* + 3 cos 3*х*, *y*(π) = 1; г) *y*'= **, *у*(0)*=2.*

*Відповідь:* а) *у* = sin*x*; б) *y* = *еx – е-x*; в) *y* = sin 3*x* – cos 3*х* – 1; г) *у =*  +1.

* **Рівняння з відокремлюваними змінними**.

**Рівняння з відокремленими** **й відокремлюваними змінними**

            Якщо в диференціальному рівнянні першого порядку

D:\Vitaliy\Хмельниць\dn\k014\50_files\image001.gif

праву частину можна подати у вигляді

D:\Vitaliy\Хмельниць\dn\k014\50_files\image002.gif

то  (за умови, що D:\Vitaliy\Хмельниць\dn\k014\50_files\image003.gif)  це рівняння можна записати так:

D:\Vitaliy\Хмельниць\dn\k014\50_files\image004.gif

            Розглядаючи цю рівність як рівність двох диференціалів та інтегруючи зліва за у , а справа за х, отримаємо

D:\Vitaliy\Хмельниць\dn\k014\50_files\image007.gif

            Це співвідношення є загальним інтегралом рівняння.

***Означення 7.*** Диференціальне рівняння першого порядку типуD:\Vitaliy\Хмельниць\dn\k014\50_files\image004.gif, в якому при диференціалах *dy* та *d*x  стоять відповідно функції, залежні тільки від*y*  чи тільки від *x*, називається диференціальним рівнянням ***з* *відокремленими змінними*.**

***Приклад 3.*** Знайдемо загальний розв’язок ДР 

⚫ Інтегруючи, дістаємо інтеграл ДР 

***Приклад 4*.** Знайдіть розв'язок диференціального рівняння *ds= (4t-3)dt*, що задовольняє умові *s=0, якщо t=0 (№1)*

***Означення 8.***   Диференціальне рівняння вигляду

D:\Vitaliy\Хмельниць\dn\k014\50_files\image010.gif

  називається рівнянням з **відокремлюваними змінними.**

            Справді, якщо D:\Vitaliy\Хмельниць\dn\k014\50_files\image011.gif, то змінні відокремлюються діленням обох частин рівняння на D:\Vitaliy\Хмельниць\dn\k014\50_files\image012.gif. Маємо

D:\Vitaliy\Хмельниць\dn\k014\50_files\image013.gif

і, отже, загальний інтеграл рівняння, має вигляд

D:\Vitaliy\Хмельниць\dn\k014\50_files\image014.gif.

***Приклад 5.*** Знайдемо загальний розв’язок ДР 

⚫ Запишемо рівняння у вигляді

 

або



***Приклад 6.*** Знайдіть розв'язок диференціального рівняння *xdy=ydx*, що задовольняє умові *y=10, якщо x=5*

⚫ =

*=*

*ln= ln+ ln(ln для полегшення потенціювання)*

*=, y=, y=cx*

*10=5c, c=2*

*y=2x*

1. **Підсумок заняття. Повідомлення домашнього завдання.**

Розв’язати рівняння:а) *y*' = tg*x*, *y*(0) = 0; б) *у’ = 2x+ 2-x;* *у*(0) = 0;

в) *у'* = 3 cos 3*х* + 4 cos 4*х*, *y*(π) = 1; г) *y*'= , *у*(0)*=1.*

№2,3,5,9,10