**Тема: Застосування інтеграла до обчислення об’ємів геометричних фігур.**

* + - 1. Сприймання і усвідомлення формули знаходження об’єму **тіл**

Поняття інтеграла може бути використано для виведення формули об’ємів тіл. Розглянемо практичний приклад.

Припустимо, що нам потрібно обчислити об’єм лимона, який має неправильну форму, і тому використати яку-небудь відому формулу об’єму неможливо. Поступимо таким чином. Розріжемо лимон на тоненькі дольки. Кожну дольку приблизно можна вважати циліндром, радіус якого можна виміряти. Об’єм такого циліндра легко обчислити за готовою формулою. Склавши об’єми маленьких циліндрів, ми одержимо приблизно об’єм всього лимона. Наближення буде тим точніше, чим на більш тонкі частини ми зможемо розрізати лимон.

Використаємо аналогічну процедуру для обчислення об’єму тіла обертання.

На рис. 1 зображено тіло, об’єм якого треба знайти. Розіб’ємо його на ***n*** шарів однакової висоти. Кожний із них має об’єм , де - площа перерізу тіла площиною, яка перпендикулярна до осі Оx і перетинає вісь абсцис у точці ; , - висота шару. Оскільки всі шари мають однакову висоту, то , де  - висота тіла.

Якщо площі перерізів відповідно , то



Якщо , то .

- інтегральна сума для неперервної на [a;b] функції , отже,

. (1)

 Використаємо отриманий результат для обґрунтування формули об’єму тіл обертання.

Нехай криволінійна трапеція спирається на відрізок [a;b] осі Ох і обмежена зверху графіком функції y=f(x), яка невід’ємна і неперервна на відрізку [a;b].

Внаслідок обертання цієї криволінійної трапеції навколо осі Ох утворюється тіло, об’єм якого можна знайти за формулою: (2)

Дійсно, кожна площина, яка перпендикулярна до осі Ох і перетинає відрізок [a;b] цієї осі в точці x, дає в перерізі з тілом круг радіуса f(x) і площею . Звідси за формулою (1) одержуємо формулу (2).

***Приклад 1.*** Знайдіть об’єм тіла, отриманого обмеженням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями у = ; у = 0; x = 1; x = 4.

Розв’язання. Криволінійна трапеція, що обертається подана на малюнку 2. Об’єм утвореного тіла

***Приклад 2.*** Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями у=2х+4, у=0, х=0.

(куб. од.)

* + - 1. Практична робота

Обчисліть об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

а) *у = 3х, у = 0, x = 2;*

б) *у* =*, y = 0, x = 2;*

в) *у* = *х2 + 1, у* = 0, *x* = 0, *x =* 2;

г) *у* = *х*3, *у* = 1, *x* = 2;

д) *y* = *sin x*, *у* = 0, .

*Відповіді:* а) 24π; б) 2π; в) 13π; г)17π; д) 0,5π2.

* + - 1. Творчі завдання

***Завдання 1.*** Виведіть формули для знаходження:

а). Об’єму конуса


Розв’язання.

Нехай конус одержали в результаті обертання прямокутного трикутника ОАВ ( ОАВ = 900 ) навколо прямої ОА. Введемо прямокутну систему координат із початком О і віссю абсцис, що збігається з прямою ОА. Рівняння прямої

*ОА = у = k x , t g*$φ$*=k, t g*$φ$*= *

Трикутник АОВ є частковим випадком криволінійної трапеції ( вона обмежена віссю*Ох,*

графіком функції *y = * і прямою *х = Н* ). Тому об’єм конуса можна знайти за допомогою загальної формули для об’ємів тіл обертання:




Відповідь. V =.

б). Об’єм кулі

Розв’язування.

Введемо систему координат, вважаючи центр кулі початком координат. Площина *х у* перетинає поверхню кулі по колу радіуса*R*. Це коло записується рівнянням *х2 + у2 = R2*. Півколо, що знаходиться у верхній півплощині, задається функцією 
.


Відповідь. 

* + - 1. Домашнє завданняРозв’язати №№1170(а), 1172(а)