**Тема: Диференціальні рівняння вищих порядків. 1. Поняття диференціального рівняння вищих порядків.**

Диференціальне рівняння *n*-го порядку не розв'язане відносно старшої похідної має вигляд

, (1)

а розв’язане відносно має форму

. (2)

***Означення 1.*** Функція *y=y(x)* визначена і *n* раз неперервно–диференційовна на *(a,b*), називається розв'язком диференціального рівняння (1), якщо вона на *(a,b)* перетворює це рівняння в тотожність

****. (3)

Будь-якому розв'язку диференціального рівняння (1) відповідає на площині *(x,y)* деяка крива, яку будемо називати інтегральною.

**2. Задача Коші.**

Розглянемо диференціальне рівняння (2) і поставимо задачу Коші: серед всіх розв'язків диференціального рівняння (2) знайти такий *y=y(x)*, який задовольняє умовам

, (4)

де –задані числа, *x0* – початкове значення незалежної змінної, *y0,y01, …y0n-1* –початкові данні.

**

****

Геометрично** задача Коші полягає в тому, щоб знайти таку криву *y=y(x)*, яка задовольняє диференціальне рівняння (2), проходить через точку *M(x0,y0)* і має заданий напрямок дотичної  (мал. 1)

Рис. 1

**Механічний зміст** задачі Коші

, ,  (5)

полягає в тому, щоб знайти рух, визначений диференціальним рівнянням і який має в *t0* фіксовані положення *x0* і швидкість *V0*.

1. **Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку.**

Випадок 1. Диференціальні рівняння, що не містять шуканої функції і її похідної.

Нехай маємо рівняння виду 

Розв'язок цього рівняння знаходиться n-кратним інтегруванням:

,

,

,

…………………………………………………

,  
 де .

Тому що , є сталі, то загальний розв'язок може бути записаний і так:

.

Диференціальне рівняння виду  називається диференціальним рівнянням другого порядку, що **не містить шуканої функції та її похідної.**

Таке рівняння інтегрується два рази після введення нової змінної, що дає можливість понизити порядок. Введемо нову функцію  тоді  звідки , або  Розділимо змінні і проінтегруємо , , , або .

Розділимо змінні другий раз:

,

проінтегруємо:

,

тоді загальний розв’язок

.

***Приклад 1.*** Знайти загальний розв’язок ДР 

Якщо  то , звідки , або ;

  звідки  або ;

,  звідки

 - загальний розв’язок.

Випадок 2. Диференціальні рівняння, що не містять шуканої функції



Введемо нову змінну  отримаємо 

Якщо розв’язок цього рівняння

,

то інтегруюючи  отримаємо:

  звідки

- загальний розв’язок.

***Приклад 2.*** Знайти загальний розв’язок ДР: 

Позначимо  тоді  , тому  або 

Розділимо змінні: 

Проінтегруємо: . звідки ,  

    звідки загальний розв’язок:



***Приклад 3.*** Розв'язати рівняння .

Розв'язок. Це рівняння не містить у. Вважаючи , перетворимо рівняння до виду  - це лінійне рівняння І-го порядку.

Інтегруємо його. Вважаючи в рівнянні , , одержимо:

, .

Визначаємо , поклавши , , , відкіля , або .

Визначимо :

, , відкіля ; отже,

.

Повертаючись до змінної у, маємо

 

,

,

.

Випадок 3. Диференціальне рівняння виду , яке не містить незалежної змінної.

Рівняння цього виду допускає зниження порядку за допомогою заміни , , або .

***Приклад 4.*** Розв'язати рівняння .

Розв'язок. Вважаючи , , отримаємо рівняння I порядку відносно невідомих  і .

.

Розділимо змінні і проінтегруємо:

, ,

, , .

Повертаючись до змінної , отримаємо

, , ,

, ,

, .

***Приклад 5.*** Знайти розв'язок задачі Коші: , 

Розв'язок. Знайдемо загальний розв'язок послідовним інтегруванням даного рівняння

,

.

.

Скористаємося початковими умовами: 



 : , .

: , .

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд:

.

3. Знайти загальні розв’язки дифрівнянь другого порядку:

1).  Відповідь: y(x) = c_2 x+c_1+(4 x^(5\/2))\/45

2).  (підказка: sinxcosx=1/2sin2x)

Відповідь: y(x) = c_2 x+c_1-1\/4 sin(x) cos(x)

3).  Відповідь:y(x)=arctgx +

**Домашнє завдання**

1. Знайти загальні розв’язки дифрівняння другого порядку: а) *y′′=sinx*; б) *y′′=4.*