**Тема: Визначник Вронського.**

**Означення 1.** Функції  називаються лінійно залежними на відрізку  якщо існують не всі рівні нулю сталі  такі, що при всіх 



Якщо ж тотожність справедлива лише , то функції  називаються лінійно незалежними.

***Приклад 1.*** Функції  - лінійно незалежні на будь-якому відрізку **,** тому що вираз  є многочленом ступеню  і має не більш, ніж  дійсних коренів.

***Приклад 2.*** Функції  , де всі - дійсні різні числа - лінійно незалежні.

***Приклад 3.*** Функції  - лінійно незалежні.

Зауваження 1.

Якщо задані дві функції, то їх лінійна залежність рівносильна умові пропорційності цих функцій.

Зауваження 2.

Якщо дві функції лінійно незалежні, то їх відношення буде деяка функція, що не є сталою.

Для дослідження системи функцій на лінійну залежність часто використовують визначник Вронського.

**Означення 2.** **Визначник**[**Вронського**](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%AE%D0%B7%D0%B5%D1%84_%D0%92%D1%80%D0%BE%D0%BD%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B8%D0%B9) (вронскіан) — [визначник](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B8%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA), складений із функцій та їх [похідних](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D1%85%D1%96%D0%B4%D0%BD%D0%B0). Використовується в [теорії диференціальних рівнянь](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D0%B4%D0%B8%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D1%96%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D1%85_%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%8F%D0%BD%D1%8C).

Для n функцій визначник Вронського будується з використанням похідних до n-1 порядку.

 W = \begin{vmatrix} 
f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\
f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n' (x)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
f_1^{(n-1)}(x)& f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x)
\end{vmatrix},  

Для лінійно залежних функцій визначник Вронського дорівнює нулю.

**Для лінійного диференційного рівняння другого порядку.**

Для однорідного лінійного диференційного рівняння другого порядку у формі

 y'' + g(x)y' + h(x)y = 0 \,

визначник Вронського, складений із лінійно незалежних розв'язків рівняння визначається функцією g(x).

Нехай  y_1(x)  та  y_2 (x)  - два лінійно незалежні розв'яки, тобто

 y_1'' + g(x)y_1' + h(x)y_1 = 0 \,

 y_2'' + g(x)y_2' + h(x)y_2 = 0 \,

Домножаючи перше рівняння на  y_2 (x)  а друге на  y_1 (x)  і віднімаючи отримуємо

 W' +g(x)W = 0 \,

або

 W = C e^{-\int g(x)dx} \, .

Цю властивість можна використати для знаходження другого лінійно незалежного розв'язку рівняння, якщо один вже відомий. Рівняння для другого розв'язку є рівнянням першого, а не другого порядку.

Також з цього видно, що визначник Вронського або ніколи не нуль, або ідентичний нулю.

***Приклад 4.*** Переконаємося, що вронскіан лінійно-залежних функцій 1,x^2,3+2x^2 дорівнює нулю:


W(f_1,f_2,f_3)(x) = 
\begin{vmatrix}
1 & x^2 & 3+2x^2 \\
0 & 2x & 4x \\
0 & 2 & 4
\end{vmatrix}
= 8x-8x = 0,\qquad x\in\mathbb R.


***Приклад 5.*** Перевіримо тепер лінійну незалежність функцій 1,x,x^3


W(f_1,f_2,f_3)(x) = 
\begin{vmatrix}
1 & x & x^3\\
0 & 1 & 3x^2 \\
0 & 0 & 6x
\end{vmatrix}
= 6x, \qquad x\in\mathbb R.


Є точки, де вронскіан відмінний від нуля (у нашому випадку це будь-яка точка, крім x = 0). Тому на будь-якому проміжку ці функції будуть лінійно незалежними.

***Приклад 6.*** Наведемо тепер приклад, коли вронскіан всюди дорівнює нулю, але функції все одно лінійно незалежні. Задамо дві функції:

f_1(x)=x^2;\qquad f_2(x) =
\begin{cases}
-x^2, &  x < 0, \\
x^2, &  x \geqslant 0.
\end{cases}


Обидві функції всюди диференційовні (у тому числі в нулі, де похідні обох функцій обертаються в нуль). Переконаємося, що вронскіан всюди нуль.


W(f_1,f_2)(x) = 
\begin{cases}
  \begin{vmatrix}
  x^2 & -x^2 \\
  2x & -2x
  \end{vmatrix}
 = 0, &  \; x < 0, \\[15pt]
  \begin{vmatrix}
  x^2 & x^2 \\
  2x & 2x
  \end{vmatrix}
 = 0, &  \; x \ge 0
\end{cases}


Проте ці функції, очевидно, є [лінійно незалежними](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B0_%D0%BD%D0%B5%D0%B7%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D0%B6%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C). Бачимо що рівність вронскіана нулю не тягне за собою [лінійної залежності](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B0_%D0%B7%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D0%B6%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C) у випадку довільного вибору функцій.