**Тема: Лінійні однорідні рівняння ІІ-го порядку зі сталими коефіцієнтами.**

1. **Поняття однорідного лінійного диференціального рівняння.**

Однорідне лінійне диференційне рівняння зі сталими коефіцієнтами – це рівняння виду:

 a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y + a_0 = 0 , де коефіцієнти  a_n  - певні сталі,  f(x)  - довільна функція.

1. **Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами**

Диференціальне рівняння другого порядку називають **лінійним**, якщо воно має вигляд y′′+p y′+qy=f(x), де p, q – сталі числа. Воно містить невідому функцію y та її похідні y′,y′′ лише в першому степені.

Якщо f(x)=0, то рівняння називають **однорідним**: y′′+p y′+qy=0.

**Властивості однорідного рівняння.**

1. Якщо  – частинний розв’язок однорідного рівняння, то  – також розв’язок цього рівняння.
2. Якщо ,  – частинні розв’язки однорідного рівняння, то їх лінійна комбінація  +  також буде розв’язком цього рівняння.

Систему функцій ,   називають лінійно незалежною на проміжку (a; b), якщо тотожність = 0 має місце тоді і тільки тоді, коли .

**Загальний розв’язок** рівняння y′′+p y′+qy=0 має вигляд

,

де , – лінійно незалежні розв’язки рівняння, а  і  – довільні сталі.

Розглянемо однорідне рівняння y′′+p y′+qy=0, розв’язок якого будемо шукати у вигляді функції y= . Продиференціюємо двічі цю функцію: y′=y′′,  і підставимо отримані вирази у рівняння

Враховуючи, що , отримаємо еквівалентне рівняння, яке називають характеристичним рівнянням лінійного однорідного диференціального рівняння y′′+p y′+qy=0.

Отже, функція y=  тоді і тільки тоді буде розв’язком рівняння  y′′+p y′+qy=0, коли  є коренем характеристичного рівняння.

Зауважимо, що характеристичне рівняння отримують заміною y′′ на , y′ на , y на 1.

У процесі розв’язку характеристичного рівняння можуть виникнути такі три випадки:

1) дискримінант D>0, тоді існують два дійсні, різні корені рівняння і . При цьому загальний розв’язок рівняння має вигляд

2) дискримінант D=0 , тоді існують два дійсні, рівні корені рівняння . При цьому загальний розв’язок рівняння має вигляд

3) дискримінант D<0  , тоді існують комплексні корені рівняння   і   . При цьому загальний розв’язок рівняння має вигляд

**.**

***Приклад 1.***

Знайти загальні розв’язки рівнянь:

а) http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img055.jpg; б) http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img056.jpg;

в) http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img057.jpg.

Розв’язання.

Для рівняння а) запишемо характеристичне рівняння

http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img058.jpg

коренями якого будуть числа http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img059.jpg, http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img060.jpg. Тому загальний розв’язок має вигляд

http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img061.jpg.

Для рівняння б) характеристичним рівнянням буде рівняння

http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img062.jpg

з коренями http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img063.jpg=http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img064.jpg. Загальний розв’язок має вигляд

http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img065.jpg.

Для рівняння в) характеристичним рівнянням буде рівняння

http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img066.jpg,

яке має корені http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img067.jpg. Тому загальним розв’язком рівняння буде функція

http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img068.jpg.

**Домашнє завдання**

1. Знайти частинний розв’язок рівняння:

, якщо ; , при . Відповідь: y(x) = c_1 e^(5 x)+c_2

**Випадок, коли дискримінант характеристичного рівняння від’ємний**

* Число a+bi, де a і b – будь-які дійсні числа, i – уявна одиниця, називається **комплексним числом** (a – дійсна частина, bi – уявна частина комплексного числа, а b – коефіцієнт при уявній частині).

Число, квадрат якого дорівнює -1, позначають буквою i і називають **уявною одиницею** (i – перша буква латинського слова imaginarius – уявний).

Тобто, для символу i виконується рівність i•i=i^2=-1. = *і.*

Запис a+bi називають **алгебраїчною формою комплексного числа**.

Нехай треба розв’язати квадратне рівняння  *aх2 +bх + с = 0*

x = http://konspekta.net/studopediaorg/baza10/457684074299.files/image057.png  ; у випадку *D <*0 під символом http://konspekta.net/studopediaorg/baza10/457684074299.files/image069.png розуміється число http://konspekta.net/studopediaorg/baza10/457684074299.files/image070.png

*= = 6і*;  *= = 8і*;  *= і*;  *= і*;

* Розглянемо лінійне однорідне рівняння *y′+py′′+qy=0* зхарактеристичним рівнянням , що має від’ємний дискримінант. Тоді його корені:   і , а загальний розв’язок

***Приклад 1.*** Знайти загальний розв’язок рівняння



Характеристичне рівняння  .

Його коренями є  а отже, загальний розв’я­зок однорідного рівняння такий:

http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img057.jpg

http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img066.jpg***Приклад 2.***

http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img067.jpgХарактеристичне рівняння

має корені

http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php?file=/540/uploader/Lekca_123_Lnin_diferencal_n_rvnanna_drugogo_poradku_z_prostimi_koefcntami/img068.jpg Тому загальним розв’язком рівняння буде функція

**Домашнє завдання** 1)

2) 3)  4) 











