**Тема: Лінійні однорідні рівняння ІІ-го порядку зі сталими коефіцієнтами.**

1. **Поняття однорідного лінійного диференціального рівняння.**

Однорідне лінійне диференційне рівняння зі сталими коефіцієнтами – це рівняння виду:

, де коефіцієнти  - певні сталі,  - довільна функція.

1. **Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами**

Диференціальне рівняння другого порядку називають **лінійним**, якщо воно має вигляд y′′+p y′+qy=f(x), де p, q – сталі числа. Воно містить невідому функцію y та її похідні y′,y′′ лише в першому степені.

 Якщо f(x)=0, то рівняння називають **однорідним**: y′′+p y′+qy=0.

**Властивості однорідного рівняння.**

1. Якщо  – частинний розв’язок однорідного рівняння, то  – також розв’язок цього рівняння.
2. Якщо ,  – частинні розв’язки однорідного рівняння, то їх лінійна комбінація  +  також буде розв’язком цього рівняння.

Систему функцій ,   називають лінійно незалежною на проміжку (a; b), якщо тотожність = 0 має місце тоді і тільки тоді, коли .

**Загальний розв’язок** рівняння y′′+p y′+qy=0 має вигляд

 ,

де , – лінійно незалежні розв’язки рівняння, а  і  – довільні сталі.

Розглянемо однорідне рівняння y′′+p y′+qy=0, розв’язок якого будемо шукати у вигляді функції y= . Продиференціюємо двічі цю функцію: y′=y′′,  і підставимо отримані вирази у рівняння

Враховуючи, що , отримаємо еквівалентне рівняння, яке називають характеристичним рівнянням лінійного однорідного диференціального рівняння y′′+p y′+qy=0.

Отже, функція y=  тоді і тільки тоді буде розв’язком рівняння  y′′+p y′+qy=0, коли  є коренем характеристичного рівняння.

Зауважимо, що характеристичне рівняння отримують заміною y′′ на , y′ на , y на 1.

У процесі розв’язку характеристичного рівняння можуть виникнути такі три випадки:

1) дискримінант D>0, тоді існують два дійсні, різні корені рівняння і . При цьому загальний розв’язок рівняння має вигляд

2) дискримінант D=0 , тоді існують два дійсні, рівні корені рівняння . При цьому загальний розв’язок рівняння має вигляд

3) дискримінант D<0  , тоді існують комплексні корені рівняння   і   . При цьому загальний розв’язок рівняння має вигляд

**.**

***Приклад 1.***

Знайти загальні розв’язки рівнянь:

а) ; б) ;

в) .

Розв’язання.

Для рівняння а) запишемо характеристичне рівняння



коренями якого будуть числа , . Тому загальний розв’язок має вигляд

.

Для рівняння б) характеристичним рівнянням буде рівняння



з коренями =. Загальний розв’язок має вигляд

.

Для рівняння в) характеристичним рівнянням буде рівняння

,

яке має корені . Тому загальним розв’язком рівняння буде функція

.

**Домашнє завдання**

1. Знайти частинний розв’язок рівняння:

, якщо ; , при . Відповідь: 

**Випадок, коли дискримінант характеристичного рівняння від’ємний**

* Число , де  і  – будь-які дійсні числа,  – уявна одиниця, називається **комплексним числом** ( – дійсна частина,  – уявна частина комплексного числа, а  – коефіцієнт при уявній частині).

Число, квадрат якого дорівнює , позначають буквою  і називають **уявною одиницею** ( – перша буква латинського слова imaginarius – уявний).

Тобто, для символу  виконується рівність . = *і.*

Запис  називають **алгебраїчною формою комплексного числа**.

Нехай треба розв’язати квадратне рівняння  *aх2 +bх + с = 0*

x =   ; у випадку *D <*0 під символом  розуміється число 

 *= = 6і*;  *= = 8і*;  *= і*;  *= і*;

* Розглянемо лінійне однорідне рівняння *y′+py′′+qy=0* зхарактеристичним рівнянням , що має від’ємний дискримінант. Тоді його корені:   і , а загальний розв’язок

 ***Приклад 1.*** Знайти загальний розв’язок рівняння

 

Характеристичне рівняння  .

Його коренями є  а отже, загальний розв’я­зок однорідного рівняння такий:



***Приклад 2.***

Характеристичне рівняння

має корені

 Тому загальним розв’язком рівняння буде функція

**Домашнє завдання** 1)

2) 3)  4) 











