**Тема: Границя та неперервність функцій.**

**План**

1. **Поняття границі функції.**
2. **Основні теореми про границі.**
3. Поняття неперервності функції в точці та на проміжку.
4. **Поняття границі функції.**

Побудуємо графік функції *f(x)* = *х* + 1 (рис.1). Якщо *х* наближається до1**,** то зна­чення *у* наближається до 2.

Говорять, що границя функції *f(x)* при *х*, що наближається до 1, дорівнює 2 і запи­сується: (*x* +1) = 2.

Розглянемо другий приклад.

Побудуємо графік функції *g(x)* =  і розглянемо поведінку цієї функції при *х*, близьких до 1.

Функція *g(x) =*  визначена при *х*  (-; 1)  (1; +) і графік являє собою пряму *у = х* + 1 з виколотою точкою *х* = 1 (рис. 2), бо функція *g(x) =*   не визначена в точці *х* = 1.

Якщо *х* наближається до 1 (зліва чи справа), то *у* наближається до 2 (відпов­ідно знизу чи зверху).

Отже, =2.

Розглянемо третій приклад. Побудуємо графік функції

(рис. 11) і розглянемо поведінку функції при *х,* що наближається до 1.

При *х →* 1 (що наближається до 1) границі функції *h(x)* не існує, оскільки не існує єди­ного числа, до якого наближається функція при *х,* що прямує до 1.

(Якщо *х* наближається до 1 зліва, то *h(x)* наближається до 1; якщо ж *х* наближається до 1 справа, то *h(x)* наближаєть­ся до 2).

Таким чином:

**Якщо при значеннях *х,* що прямують до дея­кого числа *а,* значення функції *f(x)* прямують до єдиного значення *b,* то говорять, що при *х,* що наближається до *а,* функція *f(x)* має границю, яка дорівнює *b,* і це записується так:  *f(x) = b* або *f(x) → b* при *х* → *а.***

Cтроге означення границі.

**Число *b* називається границею функції *у* = *f(x)* в точці *а,* якщо для будь-якого ε > 0 існує таке число δ = δ(ε) > 0, що для всіх *х: 0 <* |*х – а*| *<* δ, виконується нерівність |*f(x) – b*| *<* ε. (Рис. 4).**

Розглянемо *приклад.*

Доведіть, що (2*x* – 1) = 5.

*Розв'язання* Задамо довільне ε > 0 і покажемо, що існує δ > 0 таке, що із нерівності |*х* - 3| < δ випливає нерівність |(2х - 1) - 5| < ε. Маємо |(*2х* - 1) - 5| < є,

|*2х -* б| < ε; |2(х -3)| < ε; 2·|*х -* 3| < ε; |*х -* 3| <  Отже, якщо взяти δ = , то виконання нерівності

| *x -* 3| < δ приведе до виконання нерівності |(2*x* - 1) - 5| < ε. Отже, згідно з означенням границі маємо: (2x -1) = 5.

1. **Основні теореми про границі.**

1. Якщо функція *f(x)* має границю при *х* → *а*, то ця границя єдина.

2. Границя постійної функції дорівнює постійній  С = *С,* де *С —* постійна.

3. Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) їхніх границь, при умові, що границі доданків існують.

*(f(x)* ± *g(x)) =* *f(х)* ±  *g(x).*

4. Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь цих функцій, якщо границі множників існують

*(f(x) ·* g(x)) *=* *f(x) ·* g(x).

5. Постійний множник можна виносити за знак границі

(C*f(x)*) = С  *f(x).*

6. Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границі чисельника і знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю

, .

Сформульовані теореми використовуються при знаходженні гра­ниць функцій.

***Приклад 1.*** Знайдіть .

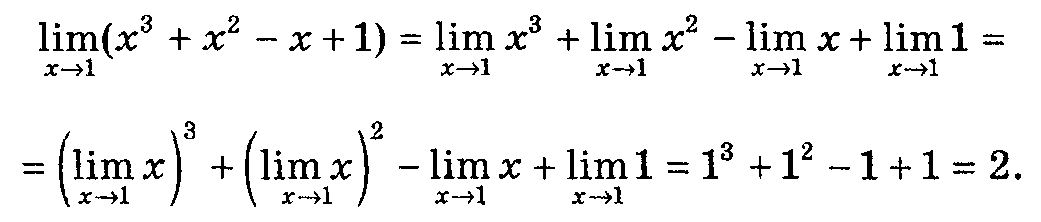
*Розв'язання*

.

*Відповідь:* 3*.*

***Приклад 2.***Знайдіть .

*Розв'язання*

**

*Відповідь:* 2*.*



***Приклад 3.***

### *Розв'язання*

В цьому прикладі безпосередньо скористатися теоремами про границі не можна, бо границя знаменника дорівнює нулю. Оскіль­ки в означенні границі |*х – а*|  *> 0,* тобто |*х — а*| ** 0, то маємо



*Відповідь:* 4.

***Приклад 4.*** Знайдіть 

*Розв'язання*

.

*Відповідь*: *–* 1*.*

1. Поняття неперервності функції в точці та на проміжку.

Розгляньте графіки функцій, зображених на рис. 5. 

Які із цих графіків можна накреслити, не відриваючи олівця від аркуша паперу?

Точки, у яких при побудові графіка відриваємо олівець від паперу, називають точками розриву, а функцію – розривною в цій точці.

На рис. 5 розривними функціями є функції *f2, f3, f4,* які мають розрив в точці *х* = 1.

В усіх останніх точках області визначення функцій *f2, f3,* *f4* ці функції не мають розриву. Отже, в інших точках функції *f2, f3,* *f4* неперервні, функція *f1* неперервна в кожній точці. Якщо функція неперервна в кожній точці деякого проміжку, то гово­рять, що функція неперервна на цьому проміжку.

**Функція називається *неперервною в* точці *хо*, якщо існує грани­ця функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в точ­ці *хо*.**

Отже, функція *у* = *f(x)* в точці *хо*, буде неперервною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1) функція *у* = *f(x)* визначена в точці *хо*, ;

2) для функції існує границя ****;

3) границя функції *f(x)* в точці *хо*, дорівнює значенню функції в цій точці: *****.*

Якщо функція *у=f(x)* неперервна в кожній точці деякого проміжку, то її називають неперервною на даному проміжку. Справедливі такі теореми.

***Теорема 1.*** Якщо функції *у = f(x)* і *у = g(x) є* неперервними в точ­ці *х ,* то в цій точці будуть неперервними й функції *у* = *f(x)* ± *g(x)* та *у* = *f(x) – g(x).*

***Теорема 2.*** Якщо функції *у = f(x)* і *у = g(x)* є неперервними в точці *хо* і , то в точці *хо*, буде неперервною також і функція .

Виходячи з теорем 1 та 2, можна стверджувати:

1. Многочлен *у* = *а0 + а1х + а2х2 +...* + *аnxn* – неперервна функ­ція в будь-якій точці *.*
2. Дробово-раціональна функція  неперервна в усіх точках числової осі, крім тих точок, у яких знаменник дорівнює нулю.

**Домашнє завдання**

1. Обчислити: а) ; б) ; в) ; г) ;

д).

2. Відомо, що , .

Знайти границі: а) ; б) .