**Тема: Розв’язання задач прикладного характеру зі застосуванням похідної**

План

* + - 1. Сторінками історії.
      2. Використання фізичного змісту похідної.
      3. Використання економічного змісту похідної.
      4. Використання похідної для знаходження найбільшого та найменшого значення функції.

Література

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика (підручник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а. технічних спеціальностей) – К.: Вища школа, 2001
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Дидактичні матеріали з математики (навчальний посібник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а.) – К.: Вища школа, 2001
3. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу (підручник) , 10-11 кл. – К.: Зодіак – ЕКО, 2002.
4. Бевз Г.П. та інші. Математика: Підручник для 10 – 11 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Генеза, 2012

Питання для самоконтролю

* + - 1. В чому полягає фізичний зміст похідної?
      2. В чому полягає економічний зміст похідної?
      3. Чим відрізняється середня і гранична вартість виробу?
      4. За яким алгоритмом знаходять найбільше і найменше значення функції?
      5. Які прикладні задачі розв’язують з використанням похідної?
      6. Які Ви знаєте професії, що вимагають знання про похідну?

Завдання для самоконтролю

Опрацювати конспект.

Розв’язати задачу: Парканом довжиною 80 м треба огородити прямокутну ділян­ку найбільшої площі. Знайдіть розміри ділянки.

**Сторінками історії.**

Англія, 1666 рік. І.Ньютон, якому лише 23 роки, робить прорив у математиці – відкриває похідну. І все. Життя Європи полетіло так швидко, що вчені не могли навіть уявити такого.

Розвиток науково-технічного прогресу, війни, виготовлення зброї, епідемії і відкриття цілющого пеніциліну, запуск космічної ракети і створення ядерних реакторів – основою цього всього послужило диференціальне числення. Від високих досягнень до стрімких падінь крокувала поряд похідна, кидаючи свої максимуми і мінімуми¸ похідна, яка миттєво змінила світ.

За допомогою диференціального числення було розв’язано цілу низку задач теоретичної механіки, фізики та астрономії. Зокрема, використовуючи методи диференціального числення, вчені передбачили повернення комети Галлея, що стало тріумфом науки XVІІІ ст. За допомогою саме цих методів математики у XVІІІ та XІX ст. вивчали різні криві: знайшли криву найшвидшого спуску матеріальної точки, навчились визначати кривизну ліній.

1. **Використання фізичного змісту похідної.**

Похідна – це швидкість зміни функції. Тому швидкість – це похідна від шляху за часом (  ), а прискорення – це похідна від швидкості за часом ( ).

Фізичні задачі, що використовують похідну:

* знаходження швидкості та прискорення прямолінійного руху тіла чи матеріальної точки;
* знаходження кутової швидкості тіла обертання ;
* знаходження швидкості зростання маси кристалів;
* визначення швидкості зміни температури під час нагрівання;
* визначення освітленості електричної лампочки.

Розглянемо способи розв’язування де-яких задач.

Задача 1 (пробне ЗНО 2007р.).

Ліфт після ввімкнення рухається за законом . Знайти швидкість в кінці п’ятої секунди.



Розв’язання

 Відповідь:

Задача 2. Лижник, спускаючись з гірки, рухається за законом Знайти швидкість і прискорення лижника в момент часу , якщо відстань вимірюється в метрах. Який це рух?



Розв’язання



Відповідь:

Рівноприскорений рух.



1. **Використання економічного змісту похідної.**

В економіці часто користуються середніми величинами: обчислюють середню собівартість продукції, середню продуктивність праці.

Проте при вивченні деяких процесів в економіці зустрічаємося з такими задачами, де потрібно з’ясувати, на яку величину зростуть витрати виробництва, якщо збільшити обсяг продукції, і, навпаки, на скільки зменшаться витрати виробництва, якщо скоротити обсяг продукції; з’ясувати залежність попиту на товар від ціни на нього. Середні величини відповіді на такі питання не дають, тому часто доводиться шукати граничні величини які є невід’ємною складовою похідної. Однією з задач, яка характеризує економічний зміст похідної є задача про продуктивність праці.

*Задача про продуктивність праці*

Нехай функція *Q0=Q(t0)* виражає кількість виробленої продукції  за час 0. Необхідно знайти продуктивність праці в момент . Похідна обсягу виробленої продукції щодо часу  – це продуктивність праці в момент часу .

Задача 3.Обсяг продукції  (ум. од.) цеху протягом робочого дня є функцією

, де  – час в годинах. Знайти продуктивність праці через

3 години від початку роботи.

Розв’язання

Учням тут слід пригадати задачу про продуктивність праці. Продуктивність праці визначається похідно .



Знаходимо продуктивність праці у момент часу , тоді 

Відповідь: продуктивність праці через 3 години від початку роботи становить 22 одиниці.

Задача 4. Залежність між витратами виробництва  (ум. од.) та обсягом випущеної продукції (од.) виражається функцією Визначте середні і граничні витрати при обсязі продукції, що рівний 5 одиницям.

Розв’язання

– це функція середніх витрат. =При  середні витрати (гр. од.). Функція граничних витрат виражається так:  при  граничні витрати грошових одиниць.

1. **Використання похідної для знаходження найбільшого та найменшого значення функції.**

Цікавою є легенда про відшукання найбільшого значення функції, за якою засновниця м. Карфагена Дідона, посварившись з братом Пігмаліоном, втекла від свого батька і після багатьох пригод з’явилася на південному узбережжі Середземного моря. Тут, у царя Нарбаса, за невеликі гроші вона купила шматок землі «не більше, ніж можна обміряти шкурою бика» - як зазначалося в угоді. Місцеві жителі вважали умову буквальною і розраховували, що Дідоні для нового поселення дістанеться дуже маленький клаптик узбережжя. Проте спритна Дідона розрізала шкуру бика на найтонші смужки, зв’язала їх мотузкою і, закріпивши один її кінець на березі моря, пішла з іншим вздовж берега. Перед нею постало питання: яку форму потрібно надати мотузці, щоб «обміряти шкурою бика» найбільшу площу? Зокрема, це є задача на пошук замкненої кривої даної довжини, що обмежує найбільшу площу. Виявляється, що такою кривою є коло. Дідоні, щоб розв’язати задачу, потрібно було обійти півколо з центром у точці О, довжина якого дорівнювала довжині мотузки. Розв'язання багатьох практичних задач зводяться до знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної на відрізку функції, тобто знаходження екстремумів.

Загальний метод розв'язування задач на екстремум за допомогою похідної складається з трьох етапів:

* *формалізація* (задача „перекладається" мовою функцій, для цього обирається зручний параметр х, через який шукану величину виражають як функцію *f(x)*;
* *розв'язання*одержаної математичної *задачі;*
* *інтерпретація*знайденого *розв'язку* („переклад" його з мови математики у терміни первинної задачі).

Нехай дано функцію , яка неперервна на відрізку [a;b], диференційована в інтервалі (a;b), за винятком можливо скінченого числа точок, де вона не існує. Необхідно ж знайти найбільше та найменше значення функції на цьому відрізку.

В практичних задачах, де процес, явище, закон, величина описуються певною функцією, зміст самої задачі накладає певні обмеження на аргумент, тобто аргумент має певні межі.

Так, наприклад, кут трикутника може змінюватися лише від 0 до , швидкість тіла доводиться розглядати в проміжку часу від t0 до t1 та інше. Тому й необхідно досліджувати поведінку функції на конкретному проміжку [a;b] або на його кінцях, то чинять так:

1. знаходять критичні точки в інтервалі (a;b) (точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує), обчислюють значення функції в цих точках;
2. знаходять значення функції на кінцях відрізка, тобто;
3. серед усіх значень вибирають найбільше і найменше значення.

******У випадку, коли функція монотонна на відрізку [a;b], то найбільшого і найменшого значення вона досягає на кінцях відрізка. У цьому випадку обмежуємось обчисленням значень .

Задача 5. Серед прямокутників, що мають периметр20 см, знайти той, діагональ якого найменша.

# Розв'язання

Нехай довжина однієї із сторін шуканого прямокутника *х* см, тоді друга сторона дорівнює (10 - *х)* см, де 0 < *х <* 10. Тоді (рис. 1) діагональ у прямокутника виражаєть­ся формулою *у* ==*.* Знайдемо стаціонарні точки:

*у'* = · (100 - *20х* + *2х2)' =* *; y’ = 0; 2x – 10 = 0;*

*х= 5.*

Якщо 0 < *х* < 5, то y' < 0, тобто функція спадає, якщо 5 < *х < 10,* то *у' > 0, і* функція зростає. Отже, найменше значення функції *у =*  на інтервалі (0; 10) дорівнює *yнайм* = *y*(5) =  = 5.

Таким чином, найменшу діагональ 5см матиме квадрат зі стороною 5 см.

Відповідь: квадрат зі стороною 5 см.

Задача 6. Визначити висоту басейну із квадратним дном, об’єм якого 32м3, такого, щоб на облицювання його стін і дна, витрати на матеріали були найменшими ( збірник підготовки до ЗНО)

Розв’язання

Нехай довжина та ширина басейну – .Складемо функцію, за якою можна обчислити площу стін і дна S(х) = + 4х = + . Дослідимо її на екстремум: S'(х) = 2х - . S'(х)=0, тоді =0 і х =4.

Відповідь: 4м.

Задача 7. У живильне середовище вносять популяцію з 1000 бактерій. Чисельність популяції зростає за законом р(t)= 1000 + ( 1000t )/( 100 + t2); t- виражається в годинах. Знайти максимальний розмір цієї популяції.