**Тема: Похідна складеної функції.**

**План**

1. Поняття складеної функції.

2. Поняття похідної складеної функції.

1. Поняття складеної функції.

Розглянемо приклад.

Приклад 1. Нехай треба обчислити по заданому значенню *х* зна­чення функції *у,* яка задана формулою *у =* *.*

Для цього спочатку треба обчислити за заданим значенням *х* значення *u* = *g(x)* = 9 – *x2, а* потім за значенням *u* обчислити *у* = *f(u)* **= **.

!

Отже, функція *g* ставить у відповідність числу *x* число *u,* а функ­ція *f —* числу *u* число *у.* Говорять, що *у* є **складеною функцією** із функцій *g і f, і* пишуть *у* = *f(g(x))·*

Функцію *g(x)* називають внутрішньою функцією, або проміж­ною змінною, функцію *f(u) —* зовнішньою функцією. Отже, щоб обчислити значення складеної функції *у* = *f(g(x))* в довільній точ­ці *х,* спочатку обчислюють значення *й* внутрішньої функції *g,* а потім *f(u).*

Приклад 2. Розглянемо функцію *у = .* Вона є складеною із функцій *u = cos х, у =* ****, де cos *x —* внутрішня функція, **** *—* зовнішня функція.

Приклад 3. Запишіть складені функції *f(g(x))* і *g(f(x)),* якщо *f(x)* = sin *х, g(x) = x2.*

*Розв'язання*

*f(g(x)) = sin g(x)* = sin *x*2;

g(f(x)) = (f(x))2 = (sinx)2 = sin2 х.

2. Поняття похідної складеної функції.

У складеній функції *у = f(g(x))* присутня проміжна змінна u*=g(x).* Тому при знаходженні похідної складеної функції ми будемо вказувати, по якій змінній взято похідну, використову­ючи при цьому спеціальні позначення:

— похідна функції *у* по аргументу *x;*

 — похідна функції *у* по аргументу *u;*

— похідна функції *u* по аргументу *x.*

***Теорема.*** Похідна складеної функції *у* == *f(g(x))* знаходиться за формулою

* де* u = g(x),

або похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішній функції по проміжній змінній, помноженій на похідну внутрішньої функції по основному аргу­менту.

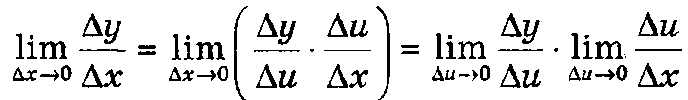
*Доведення*

Будемо вважати, що функція *u = g(x)* має похідну в точці *xo*, а функція *у = f(u)* має похідну в точці *uo = g(xo),* тобто існують границі ,  і

Δ*u* = *g(xo* + Δ*x*) - g(*xo*)  0.

Нехай аргументу *xo* надано приросту Δ*x*, тоді змінна *u* набуде приросту Δ*u* 0. Поскільки *g(x)* одержала приріст Δ*u*, то функція *у* також одержить приріст Δ*y* = *f*(*u* + Δ*u*) – *f*(*u*). Приріст Δ*x* зумовив виникнення приросту Δ*u* і Δ*y*.

Подамо  =  · . Перейдемо до границі при Δ*x* → *0* (при цьому Δ*u*→0).



*або*  **

Приклад 1. Знайдіть похідну функції *у* = (3*x*3 – 1)5.

*Розв'язання*

*у = (3х3* – *1)5 —* складена функція *у = u5, де u = 3x3* – *1,* тоді * y' = (u5)' · (3х3 – 1)’ = 5u4 · 9х = 5(3х3 -1)4 · 9х = 45х(3х3* – *1)4.*

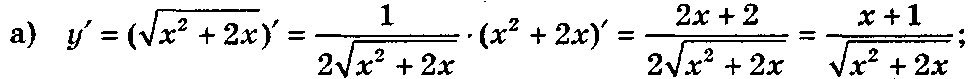
При обчисленні похідної складеної функції явне введення допоміжної букви *u* для позначення проміжного аргументу не є обов'язковим. Тому похідну даної функції знаходять відразу як добуток похідної степеневої функції *u5* на похідну від функції 3*х*3 – 1:

*у'* = ((3*x*3 – 1)5)' = *5(3х3 -*1)4 · (3*x*3 – 1)' = 5 · (3*x*3 – 1)4 · 9*x* = 45*x*(3*x*3 – 1)4.

*Приклад* 2. Знайдіть похідні функцій:

*а)* у = ; *б)* у = sin (3х + 5); *в)* у = cos2x; *г)* y = cos x2.

Розв'язання



*б)* у' = (sin(3x + 5))' = cos (3х + 5) · (3x· + 5)' = 3 cos(3x + 5);

в) *у = (cos2 x)' = 2 cos x*· *(cos x)' = 2 cos x · (- sin x) = = -2 cos x sin x = - sin 2x;*

г) *y’ = (cos x2)' = - sin x2 · (x2)' = -2x sin x2.*

**Домашнє завдання**

* вивчити формули похідних, формулу похідної складеної функції;
* розв’язати №№932(б), 962(б), 964(б) (Г.Н.Литвиненко. Збірник завдань для атестації з математики учнів 10-11 кл.)