**Тема: Екстремуми функцій.** **Правила знаходження екстремуму функції за допомогою І та ІІ похідної.**

**План**

# 1. Поняття точок екстремуму та екстремуму функції.

**2. Необхідна умова екстремуму, поняття стаціонарної точки.**

**3. Достатня ознака екстремуму функції.**

**4. Дослідження функції на екстремум за другою похідною.**

# 1. Поняття точок екстремуму та екстремуму функції.

При дослідженні поведінки функ­ції в деякій точці зручно користува­тися поняттям околу. Околом точки *а* називається будь-який інтервал, що містить цю точку. Наприклад, інтер­вали (2; 5), (2,5; 3,5), (2,9; 3,1) – окола точки 3.

Розглянемо графік функції, зоб­ражений на рис. 1. Як видно із ри­сунка, існує такий окіл точки *x = а,* що найбільше значення функція *у* = *f(x)* в цьому околі набуває в точці *х* = *а.* Точку *х* = *а* називають точкою максимуму цієї функції.

Аналогічно точку *х = b* називають точкою мінімуму функції y *= f*(*x*), оскільки значення функції в цій точці найменше по­рівняно зі значеннями функції в деякому околі точки *b.*

***Означення.*** Точка *а* із області визначення функції *f(x)* називаєть­ся точкою максимуму цієї функції, якщо існує та­кий окіл точки *а,* що для всіх *х а* із цього околу виконується нерівність *f(x) < f(a)*.

***Означення.*** Точка *b* із області визначення функції *f(x)* називаєть­ся точкою мінімуму цієї функції, якщо існує такий окіл точки *b,* що для всіх *х  b* із цього околу вико­нується нерівність *f(x) < f(b).*

Точки максимуму і точки мінімуму називають точ­ками екстремуму функції, а значення функції в цих точках називають екстремумами функції (максимум і мінімум функції).

Точки максимуму позначають *хmax ,* а точки мінімуму — *хmin .* Значення функції в цих точках, тобто максимуми і мінімуми функції, позначаються відповідно: *уmax* і *уmin*.

**2. Необхідна умова екстремуму, поняття стаціонарної точки.**

Розглянемо функцію *у = f(x),* яка визначена в деякому околі точки *xo* і має похідну в цій точці.

Якщо *xo —* точка екстремуму диференційованої функції *у* = *f(x),* то *f’(хo) = 0.*

Це твердження називають **теоре­мою Ферма** на честь П'єра Ферма (1601—1665) — французького мате­матика.

Теорема Ферма має наочний гео­метричний зміст: в точці екстрему­му дотична паралельна осі абсцис, і тому її кутовий коефіцієнт *f’(хo)*  до­рівнює нулю (рис. 3).

Наприклад, функція *f(x) = х2 – 2* має в точці *хo =* 0 мінімум (рис. 4), її похідна *f'(0) =* 0. Функція *f(x) = 1 - х2* має максимум у точці *хo* = 0, *f(x)= – 2х* і *f’(0) = 0.*



Слід зазначити, що якщо *f’(хo) = 0,* то *хo* не обов'язково є точкою екстремуму.

Наприклад, якщо *f(x)* = *х3,* то *f`(x) = 3x2* і *f`(хo) = 0*. Проте точка *х* = 0 не є точкою екст­ремуму, оскільки функція *f*(*x*) = *x*3 зростає на всій числовій осі (рис. 4).

Отже, точки екстремуму диференційованої функції треба шукати тільки серед коренів рів­няння *f’(x) =* 0, але не завжди корінь рівнян­ня *f’(x)* = 0 є точкою екстремуму.

**Внутрішні точки області визначення функ­ції *у = f(x),* у яких похідна дорівнює нулю, називають стаціонарни­ми**. Отже, для того щоб точка *хo* була точкою екстремуму, необ­хідно, щоб вона була стаціонарною.

**3. Достатня ознака екстремуму функції.**

Сформулюємо достатні умови того, що стаціонарна точка є точкою екст­ремуму, тобто умови, при виконанні яких стаціонарна точка є точкою максимуму або мінімуму функції.

**Якщо похідна ліворуч стаціонарної точки додатна, а праворуч — від'ємна, тобто при переході через цю точку по­хідна змінює знак з «+» на «–»*,* то ця стаціонарна точка є точкою максимуму** (рис. 5).

****Дійсно, в цьому випадку ліворуч стаціонарної точки функція зростає, а праворуч — спадає, отже, дана точка є точка максимуму.

**Якщо похідна ліворуч стаціонарної точки від'ємна, а праворуч — додат­на, тобто при переході через стаціонар­ну точку похідна змінює знак з «–» на «+», то ця стаціонарна точка є точка мінімуму** (рис. 6).

Якщо при переході через стаціонарну точку похідна не змінює знак, тобто ліворуч і праворуч від стаціонарної точки похідна додатна або від'ємна, то ця точка не є точкою екстремуму.

***Приклад 1.***Знайдіть точки екстремуму функції *f(x)* = *х3 – 3х****.***

## Розв'язання

Область визначення даної функції — *R.*

Знайдемо *f`(x): f`(x) = (x3 - 3x)' =3х2- 3.*

Похідна існує для всіх *x* є *R.*

Знайдемо стаціонарні точки: *f(x)* = 0, 3*х2 - 3 = 0, х2 —* 1 = 0, *x* = ±1.

Наносимо область визначення та стаціонарні точки на коор­динатну пряму (рис. 7*)* і визна­чимо знак похідної на кожному проміжку:

*f`(-2) = 3 · (-2)2 - 3 = 9 > 0;*

*f`(0) = 3 · (0)2 - 3 = -3 < 0;*

*f`(2) = 3 · (2)2 - 3 = 9 > 0.*

Точка *χ =* -1 є точкою максимуму, бо похідна при переході через цю точку змінює знак з «+» на «-»: *хmax* = -1.

Точка *х =* 1 — є точкою мінімуму, бо похідна при переході через цю точку змінює знак з «-» на *«+»*: *хmin* = 1.

*Відповідь: хmax=* -1, *хmin=* 1.

***Приклад 2.*** Знайдіть екстремуми функції *f(x)* = *х4 - 4х3.*

## Розв'язання

Область визначення функції — *R.*

Знайдемо похідну:

*f`(x)=* (*x4* – *4х3*) = 4*x*3 – 12*х2* = 4*x*2(*х* – 3).

Знайдемо стаціонарні точки: *f`(x)* = 0, 4*x*2(*x* – 3) = 0, *x* = 0 або *х =* 3.

Наносимо стаціонарні точки на координатну пряму (рис. 8) та визначаємо знак похідної на кож­ному інтервалі.

*x = 3 —* точка мінімуму, бо при переході через цю точку похідна змінює знак з «–» на «+»: *хmin*= 3.

Точка *x =* 0 не є точкою екстремуму, бо похідна не змінює знак при переході через цю точку.

Отже, *уmin* = *f*(3) = 34 – 4 · 33 = – 27.

*Відповідь:* *уmin* = *f*(3) = – 27.

**4. Дослідження функції на екстремум за другою похідною.**

Нехай функція два рази диференційована в околі точки  і похідна рівна нулю  , а друга похідна не дорівнює 0. Тоді в точці  функція має локальний максимум, якщо друга похідна менша нуля  , і локальний мінімум, якщо навпаки .

**Домашнє завдання**

-Вивчити алгоритм дослідження функції на екстремум

-№950(б), 951(б), 994(б) (Г.Н.Литвиненко. Збірник завдань для атестації з математики учнів 10-11 кл.