**Тема: Лінійна залежність і незалежність векторів.**

План

1. Поняття лінійно залежних і лінійно незалежних векторів.
2. Властивості лінійно залежних векторів.
3. Приклади задач на лінійну залежність та лінійну незалежність векторів.

Література

1. В.В. Пак, Ю.Л. Носенко «Вища математика» підручник - Д.: «Видавництво Сталкер» 2006р.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. «Вища математика» Навч. Посібник - К.:А.С.К., 2011р. – 648с.

3. Коваленко І.П. «Вища математика» Навч. Посібник – К. Вища шк.., 2006. – 343с.

4. [www.mathurok.com](http://www.mathurok.com)

Питання для самоконтролю

1. Що називається лінійно залежними векторами?
2. Які вектори називаються лінійно незалежними?
3. Сформулюйте властивості лінійно залежних векторів.
4. Які методи встановлення лінійної залежності і незалежності векторів існують?

Завдання для самоконтролю

Вивчити означення і методи дослідження на лінійну залежність векторів.

З’ясувати лінійну залежність векторів:

а) $\overbar{a}$ = ($\overbar{1; -1; 2 }$), $\overbar{b}$  = ($\overbar{10; 1; 1 }$), $\overbar{c}$ = ( $\overbar{2; -1; 6 }$)

б) $\overbar{a}$ = ($\overbar{1; 2; 3 }$), $\overbar{b}$  = ($\overbar{0; 1; 2 }$), $\overbar{c}$ = ( $\overbar{1; 3; -1 }$)

1. **Поняття лінійно залежних і лінійно незалежних векторів.**

Вектори бувають лінійно залежними або незалежними. Ці властивості визначають на основі наступних правил:
1) Вектори  називаються лінійно залежними, якщо знайдуться такі дійсні числа , одночасно не рівні нулю, при яких справджується рівність


2) Якщо рівність  виконується лише за умови, що  , то вектори називаються лінійно незалежними.

На практиці лінійну незалежність векторів перевіряють із умови, що [визначник](http://yukhym.com/uk/matritsi-ta-viznachniki/viznachniki-ta-jikh-vlastivosti-minori-dopovnennya.html%22%20%5Ct%20%22_blank) складений із координат векторів відмінний від нуля. Для прикладу, якщо маємо три вектори з простору , то для підтвердження їх лінійної незалежності визначник

не має бути рівний нулеві. В іншому випадку вектори будуть лінійно залежними.
З властивостей визначників випливає, що вектори будуть лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них є лінійною комбінацією інших.

Вимірність простору - це максимальна кількість лінійно незалежних векторів, що може бути у ньому. Будь-яку сукупність лінійно незалежних векторів -вимірного лінійного простору  називають його базисом.

1. **Властивості лінійно залежних векторів.**

*Для 2-х і 3-х вимірних векторів.*

 Два лінійно залежних вектора - колінеарні. (Колінеарні вектори - лінійно залежні.)

*Для 3-х вимірних векторів.*

 Три лінійно залежних вектора - компланарні. (Три компланарні вектора - лінійно залежні.)

*Для n -вимірних векторів.*

 n + 1 вектор завжди лінійно залежні.

1. **Приклади задач на лінійну залежність та лінійну незалежність векторів.**

**Приклад 1.** Перевірити чи будуть вектори $\overbar{a}$ = ($ \overbar{3; 4; 5 }$  ), $\overbar{b}$ = ( $\overbar{3; 0; 5 }$),$ \overbar{c} $= ( $\overbar{4; 4; 4 }$), $\overbar{d}$ = ($\overbar{3; 4; 0 }$) лінійно незалежними.

Розв'язок:

Вектори будуть лінійно залежними, так як розмірність векторів менша за кількість векторів.

**Приклад 2.** Перевірити чи будуть вектори $\overbar{a}$ = ($\overbar{1; 1; 0 }$), $\overbar{b}$  = ($\overbar{1; 2; -1 }$), $\overbar{c}$ = ( $\overbar{1; 0; 1 }$) лінійно незалежними.

Розв'язок

І спосіб. Знайдемо значення коефіцієнтів при яких лінійна комбінація цих векторів буде дорівнювати нульовому вектору.

x1a + x2b + x3c = 0

Це векторне рівняння можна записати у вигляді системи лінійних рівнянь

|  |  |
| --- | --- |
| {  | x1 + x2 = 0 |
| x1 + 2x2 - x3 = 0 |
| x1 + x3 = 0 |

Розв'яжемо цю систему, скориставшись методом Гауса

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ( |   1   |   1   |   0   |   0   | ) |  ~ |
|   1   |   2   |   -1   |   0   |
|   1   |   0   |   1   |   0   |

від другого рядка віднімемо перший; від третього віднімемо перший:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ~  | ( |   1   |   1   |   0   |   0   | ) |   ~    | ( |   1   |   1   |   0   |   0   | ) |  ~ |
|   1 - 1   |   2 - 1   |   -1 - 0   |   0 - 0   |   0   |   1   |   -1   |   0   |
|   1 - 1   |   0 - 1   |   1 - 0   |   0 - 0   |   0   |   -1   |   1   |   0   |

від першого рядка віднімемо другий; до третього рядка додамо другий:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ~  | ( |   1 - 0   |   1 - 1   |   0 - (-1)   |   0 - 0   | ) |   ~    | ( |   1   |   0   |   1   |   0   | ) |
|   0   |   1   |   -1   |   0   |   0   |   1   |   -1   |   0   |
|   0 + 0   |   -1 + 1   |   1 + (-1)   |   0 + 0   |   0   |   0   |   0   |   0   |

Цей розв'язок показує, що система має множину розв'язків, тобто існує ненульова комбінація значень чисел x1, x2, x3 таких, що лінійна комбінація векторів $\overbar{a}$, $\overbar{b}$, $\overbar{c}$ дорівнює нульовому вектору, наприклад:

-2$\overbar{a}$ + $\overbar{b}$ + $\overbar{c}$  = 0

а це означає що вектори $\overbar{a}$, $\overbar{b}$, $\overbar{c}$ лінійно залежні.

ІІ спосіб. Знайдемо визначник, складений із координат векторів:

$\left|\begin{array}{c}1 1 0\\1 2-1\\1 0 1\end{array}\right|$= 0

Відповідь: вектори $\overbar{a}$, $\overbar{b}$, $\overbar{c}$ лінійно залежні.

**Приклад 3.** Перевірити чи будуть вектори $\overbar{a}$ = ($\overbar{1; 1; 0 }$), $\overbar{b}$  = ($\overbar{1; 2; -1 }$), $\overbar{c}$ = ( $\overbar{1; 0; 2 }$) лінійно незалежними.

Розв'язок

І спосіб. Знайдемо значення коефіцієнтів при яких лінійна комбінація цих векторів буде дорівнювати нульовому вектору.

x1a + x2b + x3c = 0

Це векторне рівняння можна записати у вигляді системи лінійних рівнянь

|  |  |
| --- | --- |
| {  | x1 + x2 = 0 |
| x1 + 2x2 - x3 = 0 |
| x1 + 2x3 = 0 |

Розв'яжемо цю систему, використовуючи метод Гауса

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ( |   1   |   1   |   0   |   0   | ) |  ~ |
|   1   |   2   |   -1   |   0   |
|   1   |   0   |   2   |   0   |

від другого рядка віднімемо перший; від третього віднімемо перший:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ~  | ( |   1   |   1   |   0   |   0   | ) |   ~    | ( |   1   |   1   |   0   |   0   | ) |  ~ |
|   1 - 1   |   2 - 1   |   -1 - 0   |   0 - 0   |   0   |   1   |   -1   |   0   |
|   1 - 1   |   0 - 1   |   2 - 0   |   0 - 0   |   0   |   -1   |   2   |   0   |

До третього рядка додамо другий:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ~  | ( |   1   |   1   |   0   |   0   | ) |  |  |
|   0   |   1   |   -1   |   0   |
|   0   |   0   |   1  |   0   |

Даний розв'язок показує, що система має єдиний розв'язок x1= 0, x2 = 0, x3 = 0, а це означає що вектори $\overbar{a}$, $\overbar{b}$, $\overbar{c}$ лінійно незалежні.

ІІ спосіб. Знайдемо визначник, складений із координат векторів:

$\left|\begin{array}{c}1 1 0\\1 2-1\\1 0 2\end{array}\right|=1\ne $ 0

Відповідь: вектори $\overbar{a}$, $\overbar{b}$, $\overbar{c}$ лінійно незалежні.