**Тема: Лінійна залежність і незалежність векторів.**

План

1. Поняття лінійно залежних і лінійно незалежних векторів.
2. Властивості лінійно залежних векторів.
3. Приклади задач на лінійну залежність та лінійну незалежність векторів.

Література

1. В.В. Пак, Ю.Л. Носенко «Вища математика» підручник - Д.: «Видавництво Сталкер» 2006р.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. «Вища математика» Навч. Посібник - К.:А.С.К., 2011р. – 648с.

3. Коваленко І.П. «Вища математика» Навч. Посібник – К. Вища шк.., 2006. – 343с.

4. [www.mathurok.com](http://www.mathurok.com)

Питання для самоконтролю

1. Що називається лінійно залежними векторами?
2. Які вектори називаються лінійно незалежними?
3. Сформулюйте властивості лінійно залежних векторів.
4. Які методи встановлення лінійної залежності і незалежності векторів існують?

Завдання для самоконтролю

Вивчити означення і методи дослідження на лінійну залежність векторів.

З’ясувати лінійну залежність векторів:

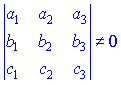
а)  = (),   = (),  = ( )

б)  = (),   = (),  = ( )

1. **Поняття лінійно залежних і лінійно незалежних векторів.**

Вектори бувають лінійно залежними або незалежними. Ці властивості визначають на основі наступних правил:   
1) Вектори http://yukhym.com/images/stories/Vector/Vec2_006.gif називаються лінійно залежними, якщо знайдуться такі дійсні числа http://yukhym.com/images/stories/Vector/Vec2_007.gif, одночасно не рівні нулю, при яких справджується рівність  
http://yukhym.com/images/stories/Vector/Vec2_008.gif

2) Якщо рівність http://yukhym.com/images/stories/Vector/Vec2_009.gif виконується лише за умови, що http://yukhym.com/images/stories/Vector/Vec2_010.gif , то вектори http://yukhym.com/images/stories/Vector/Vec2_011.gifназиваються лінійно незалежними.

На практиці лінійну незалежність векторів перевіряють із умови, що [визначник](http://yukhym.com/uk/matritsi-ta-viznachniki/viznachniki-ta-jikh-vlastivosti-minori-dopovnennya.html" \t "_blank) складений із координат векторів відмінний від нуля. Для прикладу, якщо маємо три вектори з простору http://yukhym.com/images/stories/Vector/Vec2_012.gif, то для підтвердження їх лінійної незалежності визначник   
  
не має бути рівний нулеві. В іншому випадку вектори будуть лінійно залежними.  
З властивостей визначників випливає, що вектори http://yukhym.com/images/stories/Vector/Vec2_014.gifбудуть лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них є лінійною комбінацією інших.

Вимірність простору - це максимальна кількість лінійно незалежних векторів, що може бути у ньому. Будь-яку сукупність http://yukhym.com/images/stories/Vector/Vec2_015.gifлінійно незалежних векторів http://yukhym.com/images/stories/Vector/Vec2_016.gif-вимірного лінійного простору http://yukhym.com/images/stories/Vector/Vec2_017.gif називають його базисом.

1. **Властивості лінійно залежних векторів.**

*Для 2-х і 3-х вимірних векторів.*

 Два лінійно залежних вектора - колінеарні. (Колінеарні вектори - лінійно залежні.)

*Для 3-х вимірних векторів.*

 Три лінійно залежних вектора - компланарні. (Три компланарні вектора - лінійно залежні.)

*Для n -вимірних векторів.*

 n + 1 вектор завжди лінійно залежні.

1. **Приклади задач на лінійну залежність та лінійну незалежність векторів.**

**Приклад 1.** Перевірити чи будуть вектори  = (  ),  = ( ),= ( ),  = () лінійно незалежними.

Розв'язок:

Вектори будуть лінійно залежними, так як розмірність векторів менша за кількість векторів.

**Приклад 2.** Перевірити чи будуть вектори  = (),   = (),  = ( ) лінійно незалежними.

Розв'язок

І спосіб. Знайдемо значення коефіцієнтів при яких лінійна комбінація цих векторів буде дорівнювати нульовому вектору.

x1a + x2b + x3c = 0

Це векторне рівняння можна записати у вигляді системи лінійних рівнянь

|  |  |
| --- | --- |
| { | x1 + x2 = 0 |
| x1 + 2x2 - x3 = 0 |
| x1 + x3 = 0 |

Розв'яжемо цю систему, скориставшись методом Гауса

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ( | 1 | 1 | 0 | 0 | ) | ~ |
| 1 | 2 | -1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |

від другого рядка віднімемо перший; від третього віднімемо перший:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ~ | ( | 1 | 1 | 0 | 0 | ) | ~ | ( | 1 | 1 | 0 | 0 | ) | ~ |
| 1 - 1 | 2 - 1 | -1 - 0 | 0 - 0 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| 1 - 1 | 0 - 1 | 1 - 0 | 0 - 0 | 0 | -1 | 1 | 0 |

від першого рядка віднімемо другий; до третього рядка додамо другий:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ~ | ( | 1 - 0 | 1 - 1 | 0 - (-1) | 0 - 0 | ) | ~ | ( | 1 | 0 | 1 | 0 | ) |
| 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| 0 + 0 | -1 + 1 | 1 + (-1) | 0 + 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Цей розв'язок показує, що система має множину розв'язків, тобто існує ненульова комбінація значень чисел x1, x2, x3 таких, що лінійна комбінація векторів , ,  дорівнює нульовому вектору, наприклад:

-2 +  +   = 0

а це означає що вектори , ,  лінійно залежні.

ІІ спосіб. Знайдемо визначник, складений із координат векторів:

= 0

Відповідь: вектори , ,  лінійно залежні.

**Приклад 3.** Перевірити чи будуть вектори  = (),   = (),  = ( ) лінійно незалежними.

Розв'язок

І спосіб. Знайдемо значення коефіцієнтів при яких лінійна комбінація цих векторів буде дорівнювати нульовому вектору.

x1a + x2b + x3c = 0

Це векторне рівняння можна записати у вигляді системи лінійних рівнянь

|  |  |
| --- | --- |
| { | x1 + x2 = 0 |
| x1 + 2x2 - x3 = 0 |
| x1 + 2x3 = 0 |

Розв'яжемо цю систему, використовуючи метод Гауса

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ( | 1 | 1 | 0 | 0 | ) | ~ |
| 1 | 2 | -1 | 0 |
| 1 | 0 | 2 | 0 |

від другого рядка віднімемо перший; від третього віднімемо перший:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ~ | ( | 1 | 1 | 0 | 0 | ) | ~ | ( | 1 | 1 | 0 | 0 | ) | ~ |
| 1 - 1 | 2 - 1 | -1 - 0 | 0 - 0 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| 1 - 1 | 0 - 1 | 2 - 0 | 0 - 0 | 0 | -1 | 2 | 0 |

До третього рядка додамо другий:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ~ | ( | 1 | 1 | 0 | 0 | ) |  |  |
| 0 | 1 | -1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |

Даний розв'язок показує, що система має єдиний розв'язок x1= 0, x2 = 0, x3 = 0, а це означає що вектори , ,  лінійно незалежні.

ІІ спосіб. Знайдемо визначник, складений із координат векторів:

0

Відповідь: вектори , ,  лінійно незалежні.