**Тема: Однорідні лінійні системи. Загальне розв’язування однорідної системи.**

План

1. Поняття однорідної системи.
2. Розв’язання системи двох рівнянь з трьома змінними введенням параметру.
3. Розв’язання системи трьох рівнянь з трьома змінними.
4. Розв’язання однорідної системи методом Гауса.
5. Алгоритм розв’язання систем лінійних однорідних рівнянь без введення параметра.

Література

1. В.В. Пак, Ю.Л. Носенко «Вища математика» підручник - Д.: «Видавництво Сталкер» 2006р.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. «Вища математика» Навч. Посібник - К.:А.С.К., 2011р. – 648с.

3. Коваленко І.П. «Вища математика» Навч. Посібник – К. Вища шк.., 2006. – 343с.

4. [www.mathurok.com](http://www.mathurok.com)

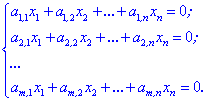
Питання для самоконтролю

1. Що називається лінійною однорідною системою?
2. Скільки розв’язків має однорідна система, якщо її детермінант не дорівнює 0?
3. Назвіть формули розв’язання системи двох рівнянь з трьома змінними введенням параметру.
4. Сформулюйте алгоритм розв’язання систем лінійних однорідних рівнянь без введення параметра.

Завдання для самоконтролю

Вивчити означення. Розв’язати однорідну систему:

1. **Поняття однорідної системи.**

Система m лінійних рівнянь з n невідомими називається однорідною, якщо всі вільні члени b1=b2=...=bm=0 рівні нулю  


Нульовий розв'язок x1=0; x2=0; ...xn=0 завжди задовольняє однорідну систему рівнянь.

Якщо детермінант не дорівнює 0, то однорідна система має єдиний нульовий розв’язок.

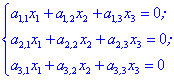
Ненульовий розв'язок (якщо він існує) найчастіше знаходять методом Гауса. Якщо кількість рівнянь і невідомих однакові m=n і [головний визначник](http://yukhym.com/uk/matritsi-ta-viznachniki/viznachniki-ta-jikh-vlastivosti-minori-dopovnennya.html" \t "_blank) рівний нулеві http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_006.gif, то однорідна система має безліч розв'язків. Кількість залежних розв'язків рівна рангу системи лінійних рівнянь r(A), решта приймають будь-які значення.  
Найчастіше на практичних заняттях зустрічаються системи двох однорідних рівнянь з трьома невідомими та трьох з трьома.  
**2. Розв’язання системи двох рівнянь з трьома змінними введенням параметру.**

Нехай маємо перший випадок  
однорідна система рівнянь  
Якщо мінори другого порядку ненульові, то розв'язок можна знайти за формулами  
розв'язок системи рівнянь  
розв'язок системи рівнянь  
розв'язок системи рівнянь  
де t http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_012.gif- будь-яке дійсне число.

**Приклад 1**. Розв'язати систему рівнянь.  
 однорідна система рівнянь

Розв'язок: Маємо однорідну систему з двох рівнянь та трьох невідомих.  
Знайдемо визначник другого порядку перших двох стовпців матриці  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_026.gif  
Оскільки він відмінний від нуля то розв'язок знаходимо за правилами  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_027.gif  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_028.gif  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_029.gif  
Таким способом отримали наступний результат  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_030.gif  
Для двох рівнянь достатньо зрозумілі і прості розрахунки.

1. **Розв’язання системи трьох рівнянь з трьома змінними.**

У випадку однорідної системи трьох рівнянь наступного вигляду  
  
можливі три варіанти:

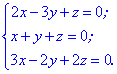
І. Детермінант рівний нулю http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_014.gif, тоді система має безліч розв'язків.

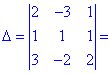
ІІ. Коли хоча б один з детермінантів другого порядку відмінний від нуля:  
Якщо перший з них відмінний від нуля  
  
то розв'язки знаходимо за формулами наведеними для двох рівнянь.

розв'язок системи рівняньрозв'язок системи рівняньрозв'язок системи рівнянь  
Якщо маємо два ненульові визначнии  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_017.gif  
то за формулами  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_018.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_019.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_020.gif  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_021.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_022.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_023.gif

де http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_024.gif- дійсне число.

ІІІ. Якщо і мінори другого порядку рівні нулю, то система зводиться до одного рівняння з трьома невідомими. Надаючи двом невідомим довільних значень знаходять третє.

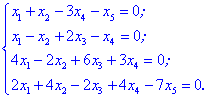
**Приклад 2.** Розв'язати систему рівнянь.  
 

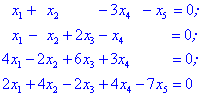
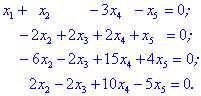
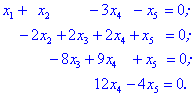
Розв'язок: Дана однорідна система має три рівняння і три невідомі. Спершу обчислимо визначник матриці за правилом трикутників  
  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_033.gif

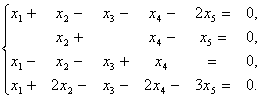
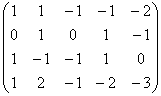
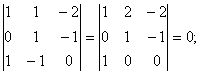
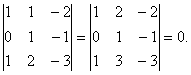
Перший визначник другого порядку приймає ненульове значення. Це дозвояє знайти корені системи рівнянь за формулами  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_035.gif  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_036.gif  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_037.gif  
Отримали розв'язок, який залежить від параметра  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_038.gif

1. **Розв’язання однорідної системи методом Гауса.**

**Приклад 3.** Знайти розв'язки системи рівнянь.



Розв'язок: Маємо однорідну систем з 4 рівнянь з 5 невідомими. Перепишемо рівняння системи так, щоб невідомі знаходилися одні під одними  
  
та спростимо систему методом Гауса.  
Для цього перетворимо в нуль всі коефіцієнти при x1 після першого рядка   
  
Виключаємо з нижніх рівнянь x2  
  
Отримали східчасту систему, яку розв'язуємо з кінця  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_045.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_046.gif  
Знайдені корені підставляємо в третє рівняння  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_047.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_048.gif  
З другого рівняння знаходимо x2  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_050.gif  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_051.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_052.gif  
Всі знайдені значення підставляємо в перше рівняння  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_053.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_054.gif  
Кінцевий розв'язок однорідної системи матиме вигляд  
http://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_055.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Slae/Slae7_056.gif  
Це рівносильно запису, що x5=t , а всі попередні виражаються через останній, тобто через параметр.  
При розв'язуванні однорідних систем лінійних рівнянь вищих порядків метод Гауса є незамінним. При системах другого, третього порядку розв'язати можна швидше за наведеними на початку формулами, в порівнянні з методом Гауса.

1. **Алгоритм розв’язання систем лінійних однорідних рівнянь без введення параметра.**   
   **Приклад 4.** Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи лінійних однорідних рівнянь:   
     
   Розв'язання. Кожна система лінійних однорідних рівнянь є сумісною. Знаходимо ранг матриці А цієї системи.   
   А =   
   [Матриця](http://ua-referat.com/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D1%96) А — ненульова, отже, http://ua-referat.com/dopb164789.zip  
   http://ua-referat.com/dopb164790.zip  
   Обчислюємо мінори третього порядку матриці А, одержані обведенням відмінного від нуля мінора http://ua-referat.com/dopb164791.zip другого порядку. Звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці А пропорційні [відповідно](http://ua-referat.com/%D0%92%D1%96%D0%B4%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D1%96%D0%B4%D1%8C" \o "Відповідь) першому та другому її стовпцям. Тому мінори, утворені обведенням за допомогою як третього, так і четвертого стовпців, дорівнюють нулю. Залишається обчислити ще два мінори, утворені обведенням за допомогою п'ятого стовпця.   
       
   Таким чином, ранг матриці А дорівнює 2. Зважаючи на те, що її базовий мінор http://ua-referat.com/dopb164791.zip розташовано в лівому верхньому куті матриці А, залишаємо в системі тільки перші два рівняння, а в їх лівих частинах — тільки перші дві невідомі. Інші три невідомі переносимо в праві частини, тобто вільними невідомими є http://ua-referat.com/dopb164794.zip. Маємо:   
   http://ua-referat.com/dopb164795.zip

**Висновок**  
Можна визначити такий основний алгоритм знаходження загального розв’язку системи лінійних однорідних рівнянь:   
1.     Виписуємо матрицю системи, при цьому вибираємо один з мінорів, що відмінний від нуля найвищого порядку. Його назвемо базою мінор.   
2.     Тоді в розглядуваній СЛАР відкидаємо всі ті рівняння, коефіцієнти при яких не увійшли до базового мінора.   
3.     В рівняннях, що залишилися переносимо у праву частину ті члени, коефіцієнти при невідомих у яких не увійшли до базового мінора. Ці невідомі назвемо вільними невідомими. Ті ж невідомі, що залишилися у тій лівій частині назвемо – головними.   
4.     Виражаємо головні невідомі через вільні невідомі.