**Тема: Однорідні лінійні системи. Загальне розв’язування однорідної системи.**

План

1. Поняття однорідної системи.
2. Розв’язання системи двох рівнянь з трьома змінними введенням параметру.
3. Розв’язання системи трьох рівнянь з трьома змінними.
4. Розв’язання однорідної системи методом Гауса.
5. Алгоритм розв’язання систем лінійних однорідних рівнянь без введення параметра.

Література

1. В.В. Пак, Ю.Л. Носенко «Вища математика» підручник - Д.: «Видавництво Сталкер» 2006р.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. «Вища математика» Навч. Посібник - К.:А.С.К., 2011р. – 648с.

3. Коваленко І.П. «Вища математика» Навч. Посібник – К. Вища шк.., 2006. – 343с.

4. [www.mathurok.com](http://www.mathurok.com)

Питання для самоконтролю

1. Що називається лінійною однорідною системою?
2. Скільки розв’язків має однорідна система, якщо її детермінант не дорівнює 0?
3. Назвіть формули розв’язання системи двох рівнянь з трьома змінними введенням параметру.
4. Сформулюйте алгоритм розв’язання систем лінійних однорідних рівнянь без введення параметра.

Завдання для самоконтролю

Вивчити означення. Розв’язати однорідну систему: $\left\{\begin{array}{c}х+ у- z = 0,\\2х + 2у – 2z = 0,\\3х+ 3у-3 z = 0.\end{array}\right.$

1. **Поняття однорідної системи.**

 Система m лінійних рівнянь з n невідомими називається однорідною, якщо всі вільні члени b1=b2=...=bm=0 рівні нулю


Нульовий розв'язок x1=0; x2=0; ...xn=0 завжди задовольняє однорідну систему рівнянь.

Якщо детермінант не дорівнює 0, то однорідна система має єдиний нульовий розв’язок.

 Ненульовий розв'язок (якщо він існує) найчастіше знаходять методом Гауса. Якщо кількість рівнянь і невідомих однакові m=n і [головний визначник](http://yukhym.com/uk/matritsi-ta-viznachniki/viznachniki-ta-jikh-vlastivosti-minori-dopovnennya.html%22%20%5Ct%20%22_blank) рівний нулеві , то однорідна система має безліч розв'язків. Кількість залежних розв'язків рівна рангу системи лінійних рівнянь r(A), решта приймають будь-які значення.
Найчастіше на практичних заняттях зустрічаються системи двох однорідних рівнянь з трьома невідомими та трьох з трьома.
**2. Розв’язання системи двох рівнянь з трьома змінними введенням параметру.**

Нехай маємо перший випадок

Якщо мінори другого порядку ненульові, то розв'язок можна знайти за формулами



де t - будь-яке дійсне число.

**Приклад 1**. Розв'язати систему рівнянь.
 

Розв'язок: Маємо однорідну систему з двох рівнянь та трьох невідомих.
Знайдемо визначник другого порядку перших двох стовпців матриці

Оскільки він відмінний від нуля то розв'язок знаходимо за правилами



Таким способом отримали наступний результат

Для двох рівнянь достатньо зрозумілі і прості розрахунки.

1. **Розв’язання системи трьох рівнянь з трьома змінними.**

У випадку однорідної системи трьох рівнянь наступного вигляду

можливі три варіанти:

І. Детермінант рівний нулю , тоді система має безліч розв'язків.

ІІ. Коли хоча б один з детермінантів другого порядку відмінний від нуля:
Якщо перший з них відмінний від нуля

то розв'язки знаходимо за формулами наведеними для двох рівнянь.


Якщо маємо два ненульові визначнии

то за формулами



де - дійсне число.

ІІІ. Якщо і мінори другого порядку рівні нулю, то система зводиться до одного рівняння з трьома невідомими. Надаючи двом невідомим довільних значень знаходять третє.

**Приклад 2.** Розв'язати систему рівнянь.
 

Розв'язок: Дана однорідна система має три рівняння і три невідомі. Спершу обчислимо визначник матриці за правилом трикутників



Перший визначник другого порядку приймає ненульове значення. Це дозвояє знайти корені системи рівнянь за формулами



Отримали розв'язок, який залежить від параметра


1. **Розв’язання однорідної системи методом Гауса.**

**Приклад 3.** Знайти розв'язки системи рівнянь.



Розв'язок: Маємо однорідну систем з 4 рівнянь з 5 невідомими. Перепишемо рівняння системи так, щоб невідомі знаходилися одні під одними

та спростимо систему методом Гауса.
Для цього перетворимо в нуль всі коефіцієнти при x1 після першого рядка

Виключаємо з нижніх рівнянь x2

Отримали східчасту систему, яку розв'язуємо з кінця

Знайдені корені підставляємо в третє рівняння

З другого рівняння знаходимо x2


Всі знайдені значення підставляємо в перше рівняння

Кінцевий розв'язок однорідної системи матиме вигляд

Це рівносильно запису, що x5=t , а всі попередні виражаються через останній, тобто через параметр.
При розв'язуванні однорідних систем лінійних рівнянь вищих порядків метод Гауса є незамінним. При системах другого, третього порядку розв'язати можна швидше за наведеними на початку формулами, в порівнянні з методом Гауса.

1. **Алгоритм розв’язання систем лінійних однорідних рівнянь без введення параметра.**
**Приклад 4.** Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи лінійних однорідних рівнянь:

Розв'язання. Кожна система лінійних однорідних рівнянь є сумісною. Знаходимо ранг матриці А цієї системи.
А = 
[Матриця](http://ua-referat.com/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D1%96) А — ненульова, отже, 

Обчислюємо мінори третього порядку матриці А, одержані обведенням відмінного від нуля мінора  другого порядку. Звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці А пропорційні [відповідно](http://ua-referat.com/%D0%92%D1%96%D0%B4%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D1%96%D0%B4%D1%8C%22%20%5Co%20%22%D0%92%D1%96%D0%B4%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D1%96%D0%B4%D1%8C) першому та другому її стовпцям. Тому мінори, утворені обведенням за допомогою як третього, так і четвертого стовпців, дорівнюють нулю. Залишається обчислити ще два мінори, утворені обведенням за допомогою п'ятого стовпця.
  
Таким чином, ранг матриці А дорівнює 2. Зважаючи на те, що її базовий мінор  розташовано в лівому верхньому куті матриці А, залишаємо в системі тільки перші два рівняння, а в їх лівих частинах — тільки перші дві невідомі. Інші три невідомі переносимо в праві частини, тобто вільними невідомими є . Маємо:


**Висновок**
Можна визначити такий основний алгоритм знаходження загального розв’язку системи лінійних однорідних рівнянь:
1.     Виписуємо матрицю системи, при цьому вибираємо один з мінорів, що відмінний від нуля найвищого порядку. Його назвемо базою мінор.
2.     Тоді в розглядуваній СЛАР відкидаємо всі ті рівняння, коефіцієнти при яких не увійшли до базового мінора.
3.     В рівняннях, що залишилися переносимо у праву частину ті члени, коефіцієнти при невідомих у яких не увійшли до базового мінора. Ці невідомі назвемо вільними невідомими. Ті ж невідомі, що залишилися у тій лівій частині назвемо – головними.
4.     Виражаємо головні невідомі через вільні невідомі.