**Тема 7.6 Розв’язання логарифмічних рівнянь та нерівностей**

1. **Засвоєння поняття найпростіших логарифмічних рівнянь та методів їх розв'язування.**

!

**Логарифмічними рівняннями називають рівняння, які містять змінну під знаком логарифма.**

Приклади логарифмічних рівнянь:

*lg* *х* = 1 + *lg*2*x*, *log*3(*x +* 3) = 9,  =  і т. д.

Розв'язати логарифмічне рівняння — це означає знайти всі його корені або довести, що рівняння коренів не має.

***loga f(x)=b loga f(x)= loga g(x)***

***а > 0, а ≠ 1 а > 0, а ≠ 1***

***f(x)= аb*** $\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)=g\left(x\right)\\f\left(x\right)>0\end{array}\right.$***або*** $\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)=g\left(x\right)\\g\left(x\right)>0\end{array}\right.$

Найпростішим логарифмічним рівнянням є і рівняння *logx a* = *b,* де *х >* 0, *х ≠* 1, *а > 0.*

За означенням логарифма маємо: *хb* = а, звідси *х* = *.*

В основному, всі логарифмічні рівняння, які ми будемо розв'я­зувати, зводяться до розв'язування найпростіших рівнянь.

***Приклад 1.*** Розв'яжіть рівняння *log*3 (2*x* + 1) = 2.

# Розв'язання

За означенням логарифма маємо:

2*х +* 1 *=* 32, 2*х =* 8, *х =* 4.

*Перевірка:* *log*3(2 · 4 + 1) = *log*39 = 2.

*Відповідь:* 4.

***Приклад 2.*** Розв'яжіть рівняння *log*3*x* = *log*3(6 – *х*2)*.*

## Розв'язання

Із рівності логарифмів чисел випливає: *х* = 6 – *х*2; *х*2 + *х* – 6 = 0;

*х*1 = -3, *х*2 = 2.

*Перевірка:*

1. Число -3 не є коренем даного рівняння, бо вираз *log*3(-3) — не визначений;
2. *log*3*x* = *log*32; *log*3(6 – *х*2) = log3(6 – 22) = *log*32.

*Відповідь:* 2.

***Приклад 3.*** Розв'яжіть рівняння *logх*+1 (2*х*2 + 1) = 2.

## Розв'язання

За означенням логарифма маємо:

2*х*2 + 1 = (*х* + 1)2; 2*х*2 + 1 = *х*2 + 2*х* + 1; *х*2 – 2*х* = 0; *х*1 = 0, *х*2 = 2.

*Перевірка:*

1) Значення *х*1 = 0 не є коренем даного рівняння, оскільки основа логарифма *х* + 1 не повинна дорівнювати 1.

2) log*х*+1(2·22 + l) = log39 = 2.

*Відповідь:* 2.

Відзначимо, що в описаних прикладах використовуються тільки такі перетворення, які не приводять до втрати коренів, але можуть привести до одержання сторонніх коренів. Тому пе­ревірка кожного із одержаних коренів обов'язкова, якщо немає впевненості в рівносильності рівнянь.

**2. Сприймання і усвідомлення різних методів розв'язу­вання логарифмічних рівнянь.**

1. Метод зведення логарифмічного рівняння до алгебраїчного.

***Приклад.*** Розв'яжіть рівняння *log* *х* – 3*log*2 *x =* 4.

### Розв'язання

Позначимо *log*2 *x* через *у*. Дане рівняння набере вигляду:

*у*2 – 3*y =* 4; *у2 –* 3*у –* 4 = 0; *у*1 *=* 4; *у*2 = -1.

Звідси *log*2 *x* = 4, *log*2 *x =-1;*

 *x =* 24; *x =*2-1;

 *x* *=* 16, *x* = .

*Перевірка:* 1) *log* 16 – 3 *log*2 16 = 16 – 12 = 4;

2) *log* – 3 *log*2  = -1 + 3 = 4.

*Відповідь:* 16; .

2. Метод потенціювання.

***Приклад.*** Розв'яжіть рівняння *log*5(*x* – 1) + *log*5(*x* – 2) = *log*5(*x* + 2).

#### Розв'язання

Пропотенціюємо дану рівність і одержимо:

*log*5((*x –* 1)(*х* *–* 2)) = *log*5(*x* + 2); (*х* – 1)(*х* – 2) = *х* + 2; *x*2 – 2*х* – *х +* 2 = *х +* 2;

*x*2 – 4*х* *=* 0; *х*(*х* – 4) = 0; *х* = 0 або *х* = 4.

*Перевірка:*

1. Значення *х* = 0 не є коренем рівняння, тому що вирази *log*5(*x* – 1) і *log*5(*x* – 2) не мають смислу при *х* = 0.
2. *log*5(*x*–1) + *log*5(*x*–2) = *log*5(4–1) + *log*5(4–2) = *log*53 + *log*52 = *log*5(2·3) = *log*56.

*log*5(*x* + 2) = *log*5(4 + 2) = *log*56.

Отже, *х* = 4 — корінь.

*Відповідь:* 4.

3. Метод зведення логарифмів до однієї і тієї ж основи.

***Приклад.*** Розв'яжіть рівняння *log*3 *х* – 2*х* = 3.

##### Розв'язання

*log*3 *x* – 2*x* = 3; *log*3 *х* – 2 ·  = 3;

*log*3 *x* – 2·  = 3; *log*3 *x* + 2*log*3 *x* = 3;

3*log*3 *x* = 3; *log*3 *x* = 1; *x* = 3.

*Перевірка:* *log*3 3 – 23 = 1 + 2 = 3. Отже, *х* = 3 — корінь.

*Відповідь:* 3.

4. Метод логарифмування.

***Приклад.*** Розв'яжіть рівняння *х lgx* = 100*х*.

##### Розв'язання

Прологарифмуємо обидві частини рівності (*х* > 0), одержимо:

*lgx lgx* = *lg*(100*x*); *lgx lgx* *=* *lg* 100 + *lgx; lg*2*x* – *lg x* – 2 = 0.

Замінимо *lg х* = *у.* Рівняння прийме вигляд: *у2 – у – 2* = 0; *y*1 = 2, *y*2= **-**1.

Тоді: 1) *lg х* = 2; *х* = 102; *х* = 100. 2) *lg x =* -1; *x =* 10-1; *x* = 0,1.

*Перевірка:* 1) *xlgx* = 100 *lg*100 = 1002 ; 100*х* = 100 · 100 = 1002.

Отже, *x =* 100 — корінь.

2) *xlgx* = 0,1*lg*0,1 = 0,1-1 =  = 10; 100*х* = 100 · 0,1 = 10.

Отже, *x =* 0,1 — корінь.

*Відповідь:* 100; 0,1.

5. Графічний метод розв'язування логарифмічних рівнянь.

***Приклад.*** Розв'яжіть рівняння *lg* *x* = 1 – *х* графічно.

##### Розв'язання

В одній і тій самій системі коорди­нат будуємо графіки функції *у =* *lg x* і *у* = 1 – *х* (рис. 1). Абсциса точки пере­тину побудованих графіків дорівнює 1. Отже, *х* = 1 — корінь даного рівняння.

*Відповідь:* 1.

**3. Сприймання і усвідомлення розв'язування найпрості­ших логарифмічних нерівностей.**

Як відомо, логарифмічна функція *у =* *logа* *х* зростає при *a >* 1,спадає — при 0 < *a <* 1. Із зростання функції *у =* *logа* *x* у першому випадку і спадання — у другому випадку випливає:

1) При *a >* 1 нерівність *logа х*2 > *logа* *х*1 рівносильна системі $\left\{\begin{array}{c}x\_{2}>x\_{1}\\x\_{1}>0\end{array}\right.$

2) При 0 < *a <* 1 нерівність *logа х*2 > *logа* *х*1 рівносильна системі $\left\{\begin{array}{c}x\_{2}<x\_{1}\\x\_{2}>0\end{array}\right.$

 Розглянемо приклади.

***Приклад 1.*** Розв'яжіть нерівність *log*2 *x <* 3*.*

# Розв'язання

Оскільки 3 = *log*223 = *log*28, то за­пишемо дану нерівність у вигляді *log*2 *x* < *log*28. Оскільки функція

*у = log*2*x* зростаюча при *х >* 0, то маємо:  отже, 0 < *х <* 8 (рис. 2). *Відповідь: х* (0; 8).

***Приклад 2.*** Розв'яжіть нерівність .

# Розв'язання

Запишемо дану нерівність у вигляді:

. Оскільки функція *у =* *х* спадна при *х* > 0*,* маємо:  отже, *х * 9 (рис. 3).

*Відповідь: х* [9; + ).

**Схема виконання рівносильних перетворень логарифмічних нерівностей.**

Як правило, логарифмічна нерівність зводиться до нерівно­стей виду: *logaf(x) > logag(x),* де*а >* 0, *а ≠* 1.

Якщо *а* > 1, то нерівність *logaf(x)* > *logag(x)* рівносильна системі нерівностей: $\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)>g(x),\\g\left(x\right)>0\end{array}\right.$

Якщо 0 < *а <* 1, то нерівність *logaf(x) > logag(x)* рівносильна системі нерівностей: $\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)<g(x),\\f\left(x\right)>0\end{array}\right.$

***Приклад 3.*** Розв'яжіть нерівність: log0,5(x2 + *х) >* -1.

## Розв'язання

Так як - 1 = *log*0,50,5-1 = *log*0,52, то *log*0,5(*x2 + х) >* *log*0,52.

Одержана нерівність рівносильна системі

  

Розв'язком першої нерівності (рис. 4)

є (-; -1)(0; +).

Розв'язком другої нерівності (рис. 5) є [-2; 1].

Тоді маємо (рис. 6) *x*  [-2;-l)(0;l].

*Відповідь:* [-2; -1)(0; 1].

1. **Підведення підсумків уроку. Домашнє завдання.**

-вивчити схеми розв’язування логарифмічних рівнянь

-№576(б), 587(б), 585(б), 589(а), 603(а), 602(а)

-підготуватися до тематичної атестації