**Тема: Диференціал функції, його геометричний зміст. Застосування диференціала до наближених обчислень.**

План

1. Поняття диференціалу функції.
2. Правила знаходження диференціала.
3. Геометричний зміст диференціала .
4. Застосування диференціала в наближених обчисленнях.

Література

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник - К.:А.С.К., 2011р. – 648с.

2. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика: Підручник - Д.:

Видавництво Сталкер 2006р.

3. Коваленко І.П. Вища математика: Навч. посібник – К. Вища шк.., 2006. – 343с.

4. [www.mathurok.com](http://www.mathurok.com)

Питання для самоконтролю

1. Що називається диференціалом функції однієї змінної?
2. Чому дорівнює диференціал аргументу цієї функції?
3. Як обчислити диференціал функції?
4. В чому полягає геометричний зміст диференціалу функції?
5. За яких умов можна вважати, що приріст функції наближено дорівнює її диференціалу: Δ*у ≈ dy*?
6. Які Ви знаєте застосування до наближених обчислень?
7. Як виконати обчислення наближеного значення приросту функції?

Завдання для самоконтролю

Вивчити означення.

Знайти диференціал функції *у=х2sinx*, функції *y=* у точці *х=1*, якщо *=0,5*.

Обчислити наближено значення функції: *f(x)=* у точці х=4,05.

1. **Поняття диференціалу функції.**

Нехай функція http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image036.png має в даній точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1564.png скінченну похідну http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1565.png. Тоді http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1566.png, де http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1567.png, якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image622.png. Звідки

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1568.png.

Якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1401.png  нескінченно малий приріст, то доданок http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1569.png є нескінченно малим вищого порядку, ніж доданок http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1570.png і якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1571.png, то http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1572.png і http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1401.png нескінченно малі одного порядку.

**Означення 1.**  **Якщо функція http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image036.png має похідну http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1445.png в точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1564.png, то вираз http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1572.png називається *диференціалом* (differential) функції в цій точці і позначається символом http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1573.png.**

Тобто, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1574.png (1)

***Зауваження.*** Диференціал функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image036.png в даній точці є головною лінійною частиною приросту функції, пропорційною приросту аргументу з коефіцієнтом пропорційності http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1445.png:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1575.png.

Диференціал незалежної змінної ототожнюється з її приростом, тобто

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1576.png, оскільки =*dx=x*'=

Для будь-якої диференційованої в точці *х* функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image036.png формулу (1) можна записати так:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1577.png.

Звідки отримаємо, що

**http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1578.png**,                                            (2)

тобто похідну можна розглядати як відношення двох диференціалів.

**Приклад 1.** Знайти диференціали функцій:

1) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image051.gif; 2) y=sin 2x; 3) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image053.gif; 4) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image055.gif; 5) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image057.gif.

Розв’язання

1) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image059.gif;

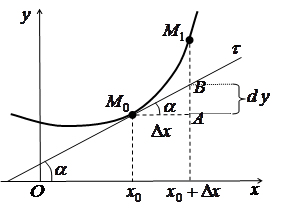
2) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image061.gif;

3) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image063.gif;

4) http://www.function-x.ru/chapter7/differential_clip_image065.gif

1. **Правила знаходження диференціала**

З правил знаходження похідної випливають правила знаходження диференціала. Якщо функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1449.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1450.png диференційовані в точці *х*, то

1. http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1579.png.
2. http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1580.png.
3. http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1581.png, де http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1466.png.
4. http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1582.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1583.png.
5.  **Геометричний зміст диференціала** (geometric sense of differential)

|  |
| --- |
| Нехай http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image036.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1400.png та існує http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1594.png. За означенням диференціала http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1595.png.Скористаємося геометричним змістом похідної: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1597.png.  З трикутника http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1598.png маємо: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1599.png або http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1600.png. Але http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1601.png, тому http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1602.png.  Отже, **диференціал функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image036.png в точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1564.png визначає приріст ординати дотичної до кривої в точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1420.png при переході від абсциси http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1564.png до абсциси http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1603.png**. |

1. **Застосування диференціала в наближених обчисленнях**

З означення похідної функції в точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1564.png випливає, що її приріст http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1405.png можна подати у вигляді: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1568.png, де http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1567.png, якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image622.png.

Отже, при малих http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1401.png має місце наближена рівність:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1604.png, тобто http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1605.png.

Звідки

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1606.png.                 (3)

Формула (3) дозволяє знаходити наближене значення функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image036.png в точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1607.png, якщо відомі значення http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1608.png і http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1445.png

**Приклад 2.** Наближено обчислити значення .

За формулою (3): http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1629.png, отримаємо, що: *f(x)*=,

 Розв’язання.

*f(x1)* =  *f(*9,02*)*, *f(x0)* =  *f(*9*)*= = 3, *f’(x0)* = , *=* 0,02.

*f(*9,02*)* 3 + 0,02 = 3 + 3,0033.

**Приклад 3.**

Знайдіть наближене значення функції  у точці 2,01.

Розв’язання.

*f(x1)* =  *f(*2,01*)*, *)*, *f(x0)* =  *f(*2*)* = 40 – 4 +10 + 4 = 50,  *f’(x)* = 15- 2*x* +5, *f’(*2*)* = 60 – 4 +5 = 61, *=* 0,01.

*f(*2,01*)* 50 + 61 0,01 = 50, 61.