Похідна

Похідна́ — це величина, що характеризує швидкість зміни функції. Визначається як границя відношення приросту функції до приросту її аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля (якщо така границя існує). Процес знаходження похідної називають диференціюванням.

Таблиця похідних

Функція	**Похідна**
Степенева функція	
$y = c$ $(const)$	$y' = 0$
$y = x^n$, $n \in \mathbb{R}$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
Частинні випадки, що часто зустрічаються	
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^2$	$y' = 2x$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
Показникова функція	
$y = a^x$, $a > 0$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
Логарифмічна функція	
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
Тригонометричні функції	
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Приклад. $y = \sqrt[5]{x^3}$

$y = x^{\frac{3}{5}}$;

$$y' = \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5} \cdot x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}.$$

Правила диференціювання (властивості похідної)

Під правилами диференціювання розуміють правила знаходження похідної суми, різниці, добутку, частки функцій, а також складеної функції.

1) $\left(c\cdot f\left(x\right)\right)'=c\cdot f'\left(x\right)$ – сталий множник можна виносити за знак похідної. Рекомендується так робити завжди, адже ця дія спрощує знаходження похідної.

2) $\left(f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right)'=f'\left(x\right)\pm g'\left(x\right)$ – похідна від суми чи різниці – це сума або різниця похідних функцій-доданків.

3) $\left(f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right)'=f'\left(x\right)\cdot g\left(x\right)+f\left(x\right)\cdot g'\left(x\right)$ – похідна добутку.

4) $\left(\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)'=\dfrac{f'\left(x\right)\cdot g\left(x\right)-f\left(x\right)\cdot g'\left(x\right)}{g^2\left(x\right)}$ – похідна частки.

5) Складена функція: $\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)'=f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$. При знаходженні похідної складеної функції перемножують похідні усіх функцій, що входять до складеної функції **зі збереженням вигляду аргументів цих функцій.**

Приклади:

1) $y=2\cdot\sin x+\sqrt{x}$;

$$y'=\left(2\cdot\sin x\right)'+\left(\sqrt{x}\right)'=2\cdot\left(\sin x\right)'+\frac{1}{2\sqrt{x}}=2\cdot\cos x+\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2) $y=x^3\cdot tgx$;

$$y'=\left(x^3\cdot tgx\right)'=\left(x^3\right)'\cdot tgx+x^3\cdot\left(tgx\right)'=3x^2\cdot tgx+x^3\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) $y=\dfrac{2^x}{\cos x}$;

$$y'=\left(\frac{2^x}{\cos x}\right)'=\frac{\left(2^x\right)'\cdot\cos x-2^x\cdot\left(\cos x\right)'}{\cos^2 x}=\frac{2^x\cdot\ln 2\cdot\cos x-2^x\cdot\left(-\sin x\right)}{\cos^2 x}=$$

$=\dfrac{2^x\cdot\ln 2\cdot\cos x+2^x\cdot\sin x}{\cos^2 x}$ або $y'=2^x\cdot\dfrac{\ln 2\cdot\cos x+\sin x}{\cos^2 x}$.

Щоб навчитися знаходити похідну складеної функції, потрібно, в першу чергу, навчитися визначати порядок «вкладеності» функцій, тобто визначати, яка функція є зовнішньою, а яка — внутрішньою. Для початку радимо перед знаходженням похідних розписувати за допомогою дужок, яка функція діє на який аргумент.

Приклади знаходження похідної складеної функції:

1) $y=\sqrt{2+x^2}$. Тут можна описати «вкладеність функцій» наступним чином:

степенева функція (корінь) діє на суму $y=\left(2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Знаходимо, в першу чергу, похідну зовнішньої функції.

Вона степенева, тому застосовуємо відповідне правило:

$$\left(\left(\ \right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(\ \right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(\ \right)' = \frac{1}{2\sqrt{\left(\ \right)}}\cdot\left(\ \right)'$$

Тут $\left(\ \right)'$ – похідна внутрішньої функції, яка може бути в свою чергу складеною.

$\left(2+x^2\right)' = 2x$.

Отже, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x^2}}\cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}$.

2) $y = tg\left(\dfrac{2^x}{\sqrt{x}}\right)$

Тут легко зрозуміти, що зовнішньою є функція тангенс, аргумент якої – частка.

$$y' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2^x}{\sqrt{x}}\right)}\cdot\left(\frac{2^x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2^x}{\sqrt{x}}\right)}\cdot\frac{\left(2^x\right)'\cdot\sqrt{x} - 2^x\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2^x}{\sqrt{x}}\right)}\cdot\frac{2^x\cdot\ln 2\cdot\sqrt{x} - 2^x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{2^x}{\cos^2\left(\frac{2^x}{\sqrt{x}}\right)}\cdot\frac{2\ln 2\cdot x - 1}{2x\sqrt{x}}.$$

Похідні вищих порядків

Розглянемо похідну від похідної – похідну другого порядку. Її позначають y''.

Наприклад: $y = \sqrt{x}$.

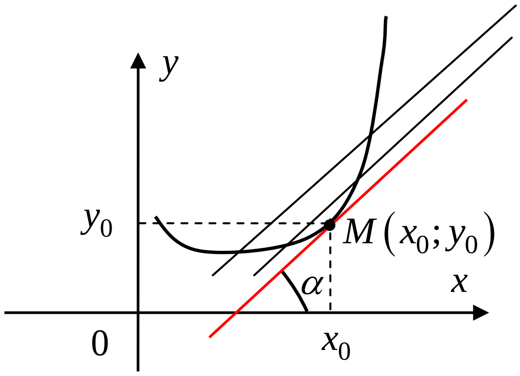
$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

Аналогічно можна знайти похідну третього, четвертого та n-го порядків.

Рівняння дотичної

Розглянемо деяку функцію $y = f\left(x\right)$ і побудуємо її графік.



Пряму, що перетинає графік функції у двох точках, називають січною. Граничне положення січної називають **дотичною** – воно відповідає максимальному зменшенню довжини відрізка між точками перетину. Дотична (позначена червоним кольором) проходить через одну точку графіка функції $y = f(x)$.

Рівняння дотичної у точці $M(x_0;y_0)$ графіка функції має вигляд:

$$y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

і є рівнянням прямої на площині.

Геометричний зміст дотичної: похідна функції в точці x_0 чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції в точці $(x_0;y(x_0))$, тобто тангенсу кута нахилу дотичної до осі абсцис:

$$y'(x_0) = k = tg\alpha.$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 - 5$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Заходимо $y_0 = y(2) = 2^2 - 5 = -1$.

$y' = 2x$; $y'(x_0) = y'(2) = 4$. Підставляємо до рівняння дотичної: $y - (-1) = 4\cdot(x-2)$.

Після спрощень отримуємо $y = 4x - 9$.

Приклад. Знайти точку на графіку функції $y = -x^2 + 3x$, дотична в якій утворює кут 45° з віссю абсцис.

Скористаємося геометричним змістом дотичної: $y'(x_0) = tg45^\circ = 1$.

$y' = \left(-x^2 + 3x\right)' = -2x + 3.$

$-2x_0 + 3 = 1 \Rightarrow x_0 = 1$; $y_0 = -1^2 + 3\cdot 1 = 2$. Отже, точка $(1;2)$.

Приклад. Знайти дотичну до графіка функції $y = 3x^2 - 11x$, яка перпендикулярна до прямої $y = -x$.

Для того, щоб знайти рівняння дотичної, потрібно спочатку знайти точку дотику. Скористаємося властивістю перпендикулярності прямих: якщо прямі перпендикулярні, то їх кутові коефіцієнти задовольняють рівності $k_1 \cdot k_2 = -1$.

$k_1 = -1$, тому $k_2 = 1$. Знайдемо точку на графіку, для якої виконується $y'(x_0) = 1$.

$y' = \left(3x^2 - 11x\right)' = 6x - 11$.

$6x_0 - 11 = 1 \Rightarrow x_0 = 2$; $y_0 = y(2) = 3 \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 = 12 - 22 = -10$

Записуємо рівняння дотичної.

$y - (-10) = 1 \cdot (x - 2)$.

$y = x - 12$ - відповідь.

Фізичний зміст похідної

Нехай задано закон руху матеріальної точки: $s = s(t)$ — функція, залежна від часу t, що задає шлях, пройдений матеріальною точкою за час t.

Тоді $s'(t_0) = v(t_0)$ – миттєва швидкість матеріальної точки у момент часу t_0, а $s''(t_0) = v'(t_0) = a(t_0)$ – прискорення матеріальної точки у момент часу t_0.

Приклад. Знайти шлях, який пройде матеріальна точка від початку руху до повної зупинки, якщо закон руху має вигляд: $s(t) = 8t - t^2$ (час в секундах, шлях в метрах).

Зупинка матеріальної точки означає, що її швидкість дорівнює нулю. Знайдемо, в який момент часу це відбудеться:

$v(t) = s'(t) = 8 - 2t$.

$8 - 2t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = 4$ (секунди).

Знайдемо, який шлях пройде матеріальна точка за 4 секунди: $s(4) = 8 \cdot 4 - 4^2 = 16$ (метрів).

Дослідження на монотонність

Нехай задано деяку функцію $y = f(x)$, визначену на відрізку $x \in [a;b]$. І нехай $f'(x) > 0$ при $x \in [a;b]$, тоді функція монотонно зростає на цьому відрізку.

Якщо $f'(x) < 0$, то функція монотонно спадна на $x \in [a;b]$.

Продемонструємо схему дослідження функції на монотонність на прикладі.

Приклад.

Знайти інтервали монотонності. $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2}$.

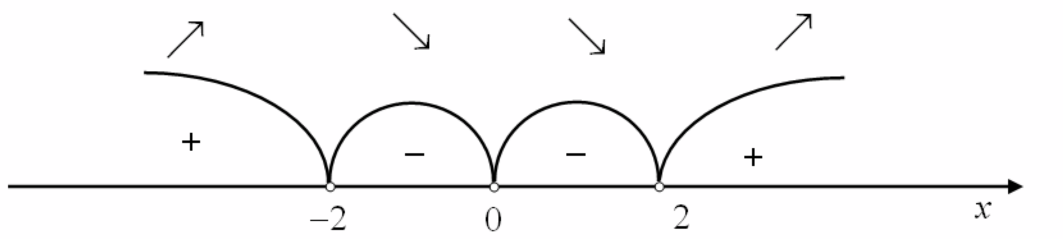
1) Знаходимо область визначення функції: $x \neq 0$, тому $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

2) Знаходимо похідну: $f'(x) = \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2}\right)' = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{2}$

3) Прирівнюємо похідну до нуля – розв'язуємо рівняння: $f'(x) = 0$: $-\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

4) Наносимо знайдені нулі похідної на числову вісь та знаходимо знаки похідної на інтервалах, на які її ділять ці нулі, з урахуванням ОДЗ, а також точок, де похідна не існує. Наносимо знаки на інтервалах:



5) Робимо висновок про вид монотонності на кожному інтервалі. Результат зображають стрілками над інтервалами або у вигляді таблиці.

Отже, при $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ функція монотонно зростає;

при $x \in (-2;0) \cup (0;2)$ – монотонно спадає.

Точки з ОДЗ, в яких похідна дорівнює нулю, називають **критичними точками** функції.

Якщо при переході через точку (зліва направо) похідна змінює знак з «-» на «+», то ця точка є точкою **локального мінімуму**; а якщо знак змінюється з «+» на «-», то вона є точкою **локального максимуму**. Загалом вони називаються точками **екстремуму**. Необхідною умовою існування екстремуму є рівність нулю похідної в цій точці.

У розглянутому прикладі точки $x = -2$ і $x = 2$ є точками екстремуму.

$x = -2$ – локальний максимум, $x = 2$ – локальний мінімум.

$f_{\max} = f(-2) = -2; \quad f_{\min} = f(2) = 2$.

Часто трапляються задачі на знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку. На відміну від локальних екстремумів, найбільше та найменше значення на відрізку існують завжди, вони можуть бути рівними нескінченності.

Продемонструємо схему знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку на прикладі. Ця схема простіша, оскільки не потрібує визначення знаків похідної.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ на відрізку $x \in [-6;8]$.

1) Знаходимо ОДЗ: $100 - x^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (10 - x)(10 + x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in [-10;10]$.

Відрізок $x \in [-6;8]$ повністю лежить в ОДЗ.

2) Знаходимо похідну:

$$f'(x) = \left(\sqrt{100 - x^2}\right)' = \left(\left(100 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(100 - x^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(100 - x^2\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(100 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

3) Прирівнюємо похідну до нуля: $-\dfrac{x}{\sqrt{100-x^2}}=0 \Leftrightarrow x=0$. Знаходимо тільки ті корені, які належать заданому відрізку.
4) Обчислюємо значення функції у знайдених точках, а також на кінцях заданого відрізка. Найбільше та найменше значення функції шукаємо серед отриманих чисел.

$f(0)=\sqrt{100-0^2}=10$;

$f(-6)=\sqrt{100-(-6)^2}=8$;

$f(8)=\sqrt{100-8^2}=6$.

Отже, маємо три числа: 6, 8, 10.
Записуємо відповідь:
найбільше значення функції
$\max\limits_{x\in[-6;8]} f(x)=f(0)=10$;
найменше значення функції
$\min\limits_{x\in[-6;8]} f(x)=f(8)=6$.

Розглянемо задачу на екстремальні значення, у якій потрібно спочатку скласти функцію, а потім знайти найбільше чи найменше її значення.

Приклад. Розкласти число 30 на додатні доданки так, щоб сума їх квадратів була найменшою. Знайти добуток цих доданків.
Введемо позначення: x та y – доданки, тобто $x+y=30$.
Найчастіше спосіб побудови функції присутній в умові. Потрібно знайти найменше значення суми квадратів, тому функцією є сума квадратів: $S=x^2+y^2$.
Для того, щоб отримати функцію, яка залежить від однієї змінної, використаємо обмеження: $x+y=30 \Rightarrow y=30-x$.
Отже, маємо функцію: $S(x)=x^2+(30-x)^2$. Тут зрозуміло, що $x\in[0;30]$.

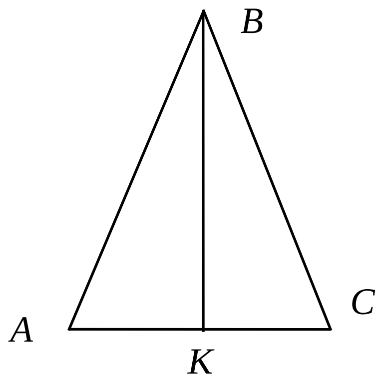
$S'(x)=2x+2(30-x)\cdot(-1)=4x-60$.

$S'(x)=0 \Rightarrow 4x-60=0 \Rightarrow x=15$.

$S(0)=900$; $S(30)=900$; $S(15)=15^2+(30-15)^2=450$.

Отже, найменше значення суми квадратів буде при $x=15, y=15$.
Добуток доданків: $15\cdot15=225$.

Приклад. Серед усіх рівнобедрених трикутників з бічною стороною, рівною 5, знайти трикутник з найбільшою площею. Знайти площу трикутника.
З умови зрозуміло, що функцією буде площа, оскільки саме її найбільше значення необхідно знайти.
Тепер потрібно ввести змінну. Тут можливі декілька варіантів, оскільки є різні формули для знаходження площі трикутника.



Скористаємося формулою: $S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a$. Нехай $AK=\frac{1}{2}a=x$, тоді за теоремою Піфагора: $h_a=BK=\sqrt{5^2-x^2}$.

$S(x)=x\sqrt{25-x^2}$.

$$S'(x)=\left(x\sqrt{25-x^2}\right)'=x'\cdot\sqrt{25-x^2}+x\cdot\left(\sqrt{25-x^2}\right)'=$$

$$=\sqrt{25-x^2}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{25-x^2}}\cdot(-2x)=\sqrt{25-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}=\frac{25-2x^2}{\sqrt{25-x^2}}.$$

$S'(x)=0 \Rightarrow 25-2x^2=0 \Rightarrow x=\frac{5}{\sqrt{2}}$.

При такому значенні, $AC=2\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$, тобто найбільшу площу має рівнобедрений прямокутний трикутник.

$S_{\max}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5=12{,}5$.

Первісна. Інтеграл

Функцію $F(x)$ називають первісною для $f(x)$, якщо $F'(x)=f(x)$.

Очевидно, що якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, то і $F(x)+C$ – теж первісна. Отже, кожна функція має безліч первісних.

Множину всіх первісних функції $f(x)$ називають невизначеним інтегралом та позначають:

$\int f(x)dx$.

Основні властивості:

1) $\int \alpha\cdot f(x)dx=\alpha\cdot\int f(x)dx$ – сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

2) $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

3) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$

4) Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Первісні (невизначені інтеграли) основних функцій

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$; частинні випадки : $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$; $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$;

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$; $\int e^x dx = e^x + C$;

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

Знаходження первісних за допомогою таблиці називають безпосереднім інтегруванням.

Приклад. Знайти первісну функції, що проходить через задану точку.

$f(x) = x + \sqrt{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$; $A(1;2)$

Знаходимо первісну кожного доданка і користуємося правилом: первісна суми дорівнює сумі первісних.

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \ln|x| + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \ln|x| + 2\sqrt{x} + C.$$

Знайдемо первісну, що проходить через задану точку. Для цього використаємо координати цієї точки:

$$2 = \frac{1^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{1^3} + \ln|1| + 2\sqrt{1} + C \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 2 + C \Rightarrow C = -\frac{7}{6}.$$

Отже, $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \ln|x| + 2\sqrt{x} - \frac{7}{6}$.

Іноді в задачах, перед тим, як знаходити інтеграл, функцію потрібно перетворити: виконати почленне ділення, розкриття дужок, перетворення тригонометричних функцій.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x\sqrt{x}-3x^3+x^2e^x}{x^2}dx$.

Потрібно звести підінтегральну функцію до табличного вигляду. Оскільки вона містить функції різних видів , то виконуємо почленне ділення:

$$\int \frac{x\sqrt{x}-3x^3+x^2e^x}{x^2}dx=\int\left(\frac{x\sqrt{x}}{x^2}-\frac{3x^3}{x^2}+\frac{x^2e^x}{x^2}\right)dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-3x+e^x\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{x}}-3\int xdx+\int e^x dx=2\sqrt{x}-\frac{3}{2}x^2+e^x+C.$$

Приклад. $\int \frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}dx$

У таблиці інтегралів немає тригонометричних функцій з аргументом $2x$, тому виконаємо перетворення, яке дозволить від них позбутися:

$$\int\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}dx=4\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(2\sin x\cos x)^2}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=$$

$$=\int\left(\frac{\cancel{\cos^2 x}}{\sin^2 x\cancel{\cos^2 x}}-\frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\sin^2 x}\cos^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=-ctgx-tgx+C.$$

Визначений інтеграл. Формула Ньютона - Лейбніца

Визначений інтеграл – це інтеграл із заданими межами інтегрування. На відміну від невизначеного, який дорівнює функції, він має числове значення.

Наведемо деякі важливі властивості визначеного інтеграла, яких не має невизначений.

1) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

2) Якщо $a\le c\le b$, то $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

3) Якщо відрізок інтегрування симетричний, а підінтегральна функція парна, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.

4) Якщо відрізок інтегрування симетричний, а підінтегральна функція непарна, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$.

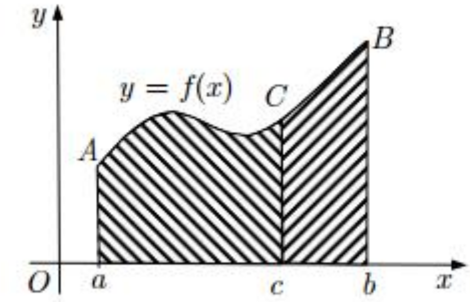
При обчисленні визначеного інтеграла спочатку знаходять первісну, а потім застосовують **формулу Ньютона - Лейбніца**:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Приклад:

$$\int_1^2 \left(x^3+1\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^4}{4}+2\right)-\left(\frac{1^4}{4}+1\right) = 5-\frac{1}{4} = \frac{19}{4}.$$

Геометрично визначений інтеграл задає площу так званої **криволінійної трапеції.** **Криволінійна трапеція** – це пласка фігура, обмежена зверху графіком кривої $y=f\left(x\right)$, знизу – віссю абсцис, зліва і справа – прямими $x=a$, $x=b$.

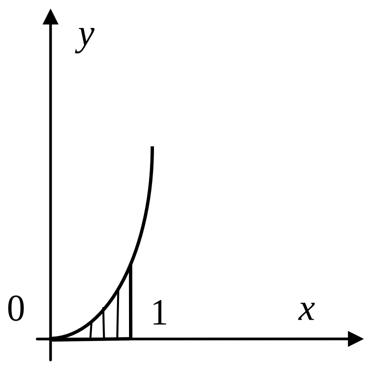


Застосування визначеного інтеграла. Знаходження площі криволінійної трапеції

$$S=\int_a^b f\left(x\right)dx.$$

Приклад.

Знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y=x^2$, $x=1$, $y=0$.



$$S=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}\ \text{(кв.од.)}.$$

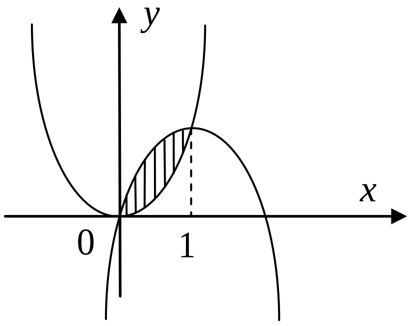
Якщо криволінійну трапецію обмежують зверху і знизу лінії $y=f_2\left(x\right)$ і $y=f_1\left(x\right)$, то користуються формулою: $S=\int_a^b \left(f_2\left(x\right)-f_1\left(x\right)\right)dx$.

Приклад. Знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y=x^2, y=2x-x^2$.

Знаходимо точки перетину парабол:

$$x^2 = 2x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(x-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Точки перетину найчастіше задають межі інтегрування.
Робимо рисунок:



$$S = \int_0^1 \left(2x - x^2 - x^2\right)dx = \int_0^1 \left(2x - 2x^2\right)dx = \left.\left(x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\right|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ (кв. од.)}$$

Задачі на знаходження інтеграла, за умови, що відома площа криволінійної трапеції

Властивості визначеного інтеграла іноді дозволяють спростити знаходження його значення, якщо застосувати геометричний зміст або перейти до простіших функцій.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}dx$.

За геометричним змістом визначеного інтеграла, він чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лінією $y = \sqrt{16 - x^2}$ (зауважимо, що $y \geq 0$, оскільки в правій частині корінь квадратний). Підносимо до квадрату обидві частини рівності та отримуємо рівняння кола з центром в початку координат та радіусом 4: $x^2 + y^2 = 4^2$. Оскільки $x \in [0;4]$ і $y \geq 0$, то криволінійною трапецією є четверть круга, площа якого $S_{кр} = \pi R^2 = 16\pi$.

Отже, $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}dx = \frac{1}{4}S_{кр} = 4\pi$.