Комбінаторика

Групи, утворені з деяких елементів, називають ***сполуками***. Задачі, в яких доводиться обчислювати кількість можливих різних сполук, утворених за деяким правилом елементів, називають ***комбінаторними***.

Розрізняють три основні види сполук: **розміщення, перестановки і комбінації.**

Сформулюємо основні правила комбінаторики.

Правило додавання.

Якщо деякий об'єкт a можна вибрати n способами, а об'єкт b— k способами, причому ніякий вибір a не збігається з жодним з виборів b, то об'єкт a або b можна вибрати $n+k$ способами (при виборі логічне «або»).

Наприклад.

Вибрати м'яч серед 5 футбольних і 6 волейбольних можна 5+6=11 способами.

Правило множення.

Якщо виконати одна за одною дві дії, першу n способами, а другу (після того, як виконана перша) m способами, то обидві дії можна виконати $m \cdot n$ способами (при виборі логічне «і»).

Наприклад.

Вибрати футбольний м'яч з-поміж 5-ти і волейбольний з-поміж 6-ти можна $5 \cdot 6 = 30$ способами.

Факторіал натурального числа n це добуток перших n натуральних чисел.

Позначається знаком оклику. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. Існує домовленість: $0! = 1$.

Розглянемо першу сполуку.

Перестановки.

Перестановками називаються сполуки з n елементів, які відрізняються порядком елементів.

Кількість перестановок позначають P_n, обчислюють за формулою: $P_n = n!$.

Продемонструємо декілька практичних прийомів для обчислення факторіалів, особливо для їх скорочення. Наприклад:

$$\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cancel{(n-3) \cdot ... \cdot 1}}{\cancel{(n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot ... 1}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2).$$

За тим же принципом можна виразити факторіали через факторіали менших чисел.

$6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 5 \cdot 4! = 30 \cdot 4!$.

Наприклад. Скількома способами можна скласти список з 6 учнів?

$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Розміщенням з n елементів по k (A_n^k) називають впорядковану k - елементну підмножину n - елементної множини ($k \le n, k > 0$).

Кількість розміщень обчислюють за формулою: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Наприклад. Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 1,3,5,7,9, якщо цифри в числі не повторюються?

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Інший спосіб мислення – для того, щоб вибрати цифри трицифрового числа, потрібно виконати три етапи – вибрати перше число, друге і третє, до того ж так, щоб вони не повторювалися.

Застосовуємо основне правило комбінаторики: на перше місце можна вибрати цифру 5-ма способами, на друге 4-ма, оскільки цифри не повторюються, на третє – 3-ма.
За правилом множення: $N = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Комбінацією з n - елементів по k (C_n^k) називають k - елементну підмножину n - елементної множини ($k \le n, k \ge 0$).

Кількість комбінацій обчислюють за формулою: $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Запишемо кілька важливих властивостей коефіцієнтів C_n^k.

$C_n^0 = 1$ (кількість способів вибрати 0 елементів серед n); $C_n^1 = n$ (кількість способів вибрати один елемент з n елементів); $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Наприклад. Скількома способами можна вибрати з 25 учнів класу 2 чергових?
Порядок чергових не має значення (тобто вони рівноправні), тому сполуки ab і ba рівні (бо це ті самі двоє людей) $C_{25}^2 = \dfrac{25!}{(25-2)! \cdot 2!} = \dfrac{25!}{23! \cdot 2!} = \dfrac{25 \cdot 24}{2} = 25 \cdot 12 = 300$.

Розглянемо кілька прикладів, що демонструють комбінаторне мислення.

Приклад 1. Скількома способами групу із 10 студентів можна розділити на дві підгрупи так, щоб в одній було 6 осіб, а в іншій 4?
Оскільки при виборі однієї групи інша формується автоматично, то потрібно вибрати лише одну з них.

$$N = C_{10}^6 = C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210.$$

Приклад 2. Скільки існує різних мобільних телефонних номерів, які містять 7 цифр (номер без коду оператора)?
Оскільки цифри в номерах телефонів можуть повторюватися, то мислимо за основним правилом комбінаторики: першою цифрою може бути будь-яка цифра з 10 можливих, другою цифрою номера аналогічно може бути 10 цифр і т.д. Отже, кількість номерів $N = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{7} = 10^7$. Тепер зрозуміло, чому мобільні оператори мають різні початкові цифри коду оператора.

Приклад 3.
З шести різних підручників з алгебри і чотирьох підручників з геометрії потрібно вибрати 2 підручники з алгебри і 3 з геометрії. Скількома способами це можна зробити?
Застосовуємо основне правило комбінаторики – потрібно вибрати підручники з алгебри і з геометрії. Першу дію можна виконати C_6^2 способами (оскільки про порядок вибору не йдеться), другу дію — C_4^3 способами. Отже, $N = C_6^2 \cdot C_4^3$.

Приклад 4. Клас з 20 учнів обирає старосту, його заступника і двох його помічників. Скількома способами це можна зробити?
Оскільки помічники рівноправні, тобто не має значення в якому порядку їх обирають, а хто староста, хто заступник – має, то за основним правилом комбінаторики: $N = A_{20}^2 \cdot C_{18}^2$.

Приклад 5. У шкільному розкладі є сім уроків на деякий день, серед яких є алгебра та геометрія. Скількома способами можна скласти розклад уроків на цей день, щоб уроки математики були поруч?

У задачах, де шкільні предмети (або інші об’єкти) повинні бути поряд, їх вважають одним предметом – наприклад, уроком математики, і кількість уроків стає меншою на 1 –

рівною 6. Кількість способів скласти розклад з 6 уроків – 6. Якщо врахувати, що може бути різний порядок алгебри і геометрії, причому розклад тоді буде іншим, то кількість способів рівна: $N = 2 \cdot 6!$ або $N = P_2 \cdot P_6$.

Приклад 6. Скільки шестицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 7 без повторення, щоб парні цифри не були поруч?

У комбінаториці іноді зручніше розглянути протилежний випадок — коли будуть поряд, якщо такий випадок простіше порахувати, а потім від загальної кількості відняти знайдену. Коли парні цифри поряд, то задача звелася до попередньої, а загальна кількість способів переставити 6 чисел рівна 6!

Отже, $N = 6! - P_2 \cdot P_5$ або $N = P_6 - P_2 \cdot P_5$.

Приклад 7.

У ліфт 10-типоверхового будинку зайшло на 1 поверсі 8 осіб. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта?

У такого типу задачах слід, в першу чергу, зважати на те, що людина не може вийти на двох поверхах одночасно, тому при обчисленні кількості варто відштовхуватися від зафіксованої людини, наприклад, одна людина може вийти на 9 поверхах, інша людина так само на 9 і так далі. Кількість способів: $N = \underbrace{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 9}_{8} = 9^8$.

Ймовірність

Ймовірністю певної події A називають відношення кількості способів, сприятливих для настання події m до кількості усіх можливих наслідків випробування n. Позначають ймовірність літерою $p(A)$. Таке означення ймовірності називають класичним.

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

Подію, протилежну, до події A позначають $\bar{A}$. Ймовірність того, що відбудеться хоча б одна з них рівна 1, тобто обов'язково відбудеться або подія, або протилежна подія.

$p(A) + p(\bar{A}) = 1.$

Розглянемо приклади.

Приклад 1. У ящику стола лежать 5 чорних, 3 червоних та 8 синіх олівців. Обчисліть ймовірність того, що навмання взятий олівець не чорний.

Скористаємося класичним означенням ймовірності – обчислимо кількість способів вибрати олівець і кількість способів вибрати олівець, що задовольняє умову задачі.

$n = 5 + 3 + 8 = 16$, кількість олівців, що задовольняє умову: $m = 3 + 8 = 11$.

Отже, $p(A) = \frac{11}{16}$.

Приклад 2. З ящика, у якому лежать 4 білих і 2 чорних кульки, витягнули дві кульки. Обчисліть ймовірність того, що серед витягнутих кульок є хоча б одна чорна.

Те, що серед кульок є хоча б одна чорна означає, що є або одна чорна (а інша біла з двох витягнутих), або обидві чорні. Знайдемо кількість способів витягнути з 6 кульок одну білу і одну чорну: $C_4^1 \cdot C_2^1$. Кількість способів витягнути обидві чорні: $C_4^0 \cdot C_2^2$.

Кількість способів витягнути 2 кульки та 6 дорівнює C_6^2.

Отже, $p(A)=\dfrac{C_4^1\cdot C_2^1+C_4^0\cdot C_2^2}{C_6^2}$. Обчислюємо за властивостями:

$$p(A)=\frac{4\cdot 2+1\cdot 1}{\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}}=\frac{9}{\dfrac{6\cdot 5}{2}}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

Приклад 3.
Дано відрізки довжинами 2, 5, 6, 9, 10. Обчисліть ймовірність того, що з навмання взятих трьох відрізків можна скласти трикутник.
Обчислимо спочатку скільки взагалі можна утворити наборів з трьох відрізків незалежно від того утворюють вони трикутник чи ні. $n=C_5^3=\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=10$.
Знайдемо тепер кількість наборів, які можуть бути сторонами трикутника, тобто для яких виконується нерівність трикутника – сума двох сторін трикутника більша за третю (таким, наприклад, не є набір 2, 5, 10, оскільки 2+5<10).
(2, 5, 6), (5, 6, 9), (5, 6, 10), (6, 9, 10), (2, 9, 10), (5, 9, 10) – їх кількість $m=6$.
Отже, $p(A)=\dfrac{6}{10}=0{,}6$.

Статистика

Статистика – це наука, що вивчає, обробляє та аналізує числові дані, отримані при дослідженні найрізноманітніших явищ природи.
Основні поняття статистики:
Вибірка – множина результатів, отриманих у спостереженні.
Варіаційний ряд – вибірка, записана в порядку зростання (варіанта) і з урахуванням повторень результатів випробувань (частота).
Середнє значення вибірки – середнє арифметичне елементів вибірки.
Медіана – середина варіаційного ряду.
Мода – значення елемента вибірки, яке зустрічається найчастіше.
Розмах вибірки – різниця між найбільшим і найменшим елементом.

Приклад 1. Результати державної атестації з математики у певному класі такі:

Оцінка	5	6	7	8	9	10	11	12
Кількість учнів, які отримали цю оцінку	1	1	4	4	4	5	4	2

Обчисліть середнє по класу значення оцінки з математики.
Кількість учнів у класі: 1+1+4+4+4+5+4+2=25
Знайдемо сумарну кількість оцінок:
$$.5\cdot 1+6\cdot 1+7\cdot 4+8\cdot 4+9\cdot 4+10\cdot 5+11\cdot 4+12\cdot 2=225$$
Середнє значення оцінки по класу: $\overline{X}=\dfrac{225}{25}=9$.

Приклад 2. Для вибірки, заданої варіаційним рядом 5, 7, 9, 4, 4, 3, 2, 5, 6, 7, 4, знайдіть моду.

Розташуємо у порядку зростання та випишемо частоту кожного значення (кількість разів, які воно повторюється):

2	3	4	5	6	7	9
1	1	3	2	1	2	1

Одразу видно, що значення 4 повторюється три рази, а решта значень – менше, отже, мода дорівнює 4. Досить просто запам’ятати, що мода – це те, що трапляється найчастіше або те, що найпопулярніше.