**Тема: Метод Гауса в розв’язанні лінійних систем.**

**Метод Гаусса - це просто! Чому? Відомий німецький математик Йоганн Карл Фрідріх Гаус ще за життя отримав визнання видатного математика всіх часів, генія і навіть прізвисько «короля математики». А все геніальне, як відомо - просто! До речі, на гроші потрапляють не тільки лохи, але ще і генії - портрет Гаусса красувався на купюрі в 10 дойчмарок (до введення євро), і досі Гаусс загадково посміхається німцям з звичайних поштових марок.**

**Спочатку трохи систематизуємо знання про системи лінійних рівнянь. Система лінійних рівнянь може:**

**1) Мати єдине рішення.**

**2) Мати нескінченно багато рішень.**

**3) Не мати рішень (бути несумісною).**

http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image002.gifМетод Гаусса - найбільш потужний і універсальний інструмент для знаходження рішення будь-якої системи лінійних рівнянь. Правило Крамера і матричний метод непридатні в тих випадках, коли система має нескінченно багато рішень або несумісна. А метод послідовного виключення невідомих в будь-якому випадку приведе нас до відповіді! Розглянемо найпростішу систему і вирішимо її методом Гаусса.

http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image004.gifНа першому етапі потрібно записати розширену матрицю системи:

**Матриця системи** - це матриця, складена тільки з коефіцієнтів при невідомих.

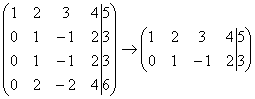
**Розширена матриця системи** - це та ж матриця системи плюс стовпець вільних членів.

Будь-яку з матриць можна для стислості називати просто матрицею.

Після того, як розширена матриця система записана, з нею необхідно виконати деякі дії, які також називаються елементарними перетвореннями.

**Існують наступні елементарні перетворення:**

1) Рядки матриці можна переставляти місцями.

2) Якщо в матриці є (або з'явилися) пропорційні (як окремий випадок - однакові) рядки, то слід видалити з матриці всі ці рядки крім одного. Розглянемо, наприклад матрицю. У даній матриці останні три рядки пропорційні, тому досить залишити тільки один з них: .

3) Якщо в матриці в ході перетворень з'явився нульовий рядок, то його також слід видалити.

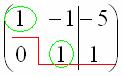
http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image016.gifhttp://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image014.gif4) Рядок матриці можна помножити (розділити) на будь-яке число, відмінне від нуля. Розглянемо, наприклад, матрицю. Тут доцільно перший рядок розділити на -3, а другий рядок - помножити на 2:

Дана дія дуже корисна, оскільки спрощує подальші перетворення матриці.

http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image025.gif5) Це перетворення викликає найбільші труднощі, але насправді нічого складного теж немає. До рядку матриці можна додати інший рядок, помножений на число, відмінне від нуля. Розглянемо нашу матрицю з практичного прикладу:

**Елементарні перетворення не змінюють рішення системи рівнянь! УВАГА: розглянуті маніпуляції не можна використовувати, якщо Вам запропоновано завдання, де матриці дані «самі по собі». Наприклад, при «класичних» діях з матрицями щось переставляти всередині матриць ні в якому разі не можна!**  
Повернемося до нашої системи http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image002_0000.gif. Вона вже майже вирішена.

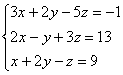
Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень наведемо її до ступінчастого увазі:http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image040.gif

http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image044.gif**Мета елементарних перетворень - привести матрицю до ступінчастого вигляду**: В оформленні завдання прямо так і підкреслюють простим олівцем «сходи», а також обводять кружечками числа, які розташовуються на «сходинках». Сам термін «ступінчастий вид» не цілком теоретичний, в науковій та навчальній літературі він часто називається трапецієподібний вид або трикутний вигляд. У результаті елементарних перетворень отримана система еквівалентна вихідній системі рівнянь:

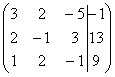
Тепер систему потрібно «розкрутити» у зворотному напрямку - знизу вгору, цей процес називається зворотним ходом методу Гаусса.

Відповідь:http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image054.gif

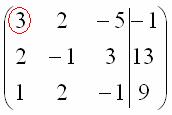
Розглянемо найбільш поширену ситуацію, коли методом Гаусса потрібно вирішити систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

Приклад 1

Вирішити методом Гаусса систему рівнянь:

Запишемо розширену матрицю системи:

Наша мета - за допомогою елементарних перетворень привести матрицю до ступінчастого вигляду. З чого почати дії?

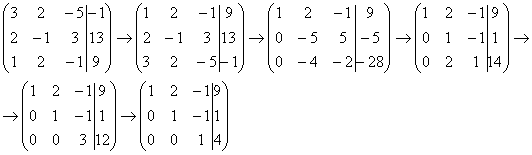
Спочатку дивимося на ліве верхнє число:  
Майже завжди тут повинна знаходитися одиниця. Взагалі кажучи, влаштує і -1 (а іноді й інші числа), але якось так традиційно склалося, що туди зазвичай поміщають одиницю. Як організувати одиницю? Дивимося на перший стовпець - готова одиниця у нас є! Перетворення перше: міняємо місцями перший і третій рядки.

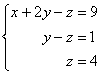
Перетворення друге: до другої рядку додати перший рядок, помножений на -2.

Перетворення третє: до третього рядку додати перший рядок, помножений на -3.

Перетворення четверте: другий рядок ділимо на –5 (оскільки там всі числа діляться на 5 без залишку). Заодно ділимо третій рядок на -2, адже чим менше числа, тим простіше рішення.

Перетворення п'яте: до третього рядку додаємо другий рядок, помножений на -2.

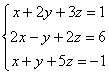
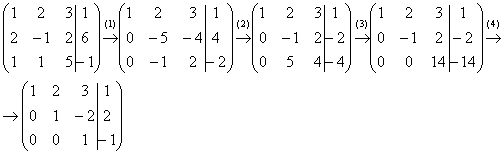
Перетворення шосте: ділимо третій рядок на 3.

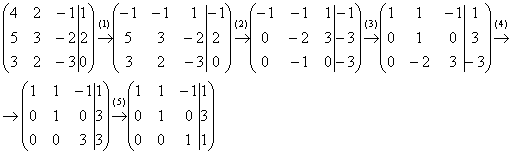
У результаті елементарних перетворень отримана еквівалентна вихідної система лінійних рівнянь:  
Тепер в дію вступає зворотний хід методу Гаусса. Рівняння «закручуються» знизу вгору.

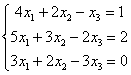
http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image090.gif; http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image092.gif; http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image094.gif; http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image096.gif

http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image098.gif; http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image100.gif; http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image102.gif; http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image104.gif

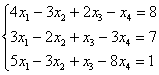
Відповідь: http://mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image106.gif

Приклад 2

Приклад 3

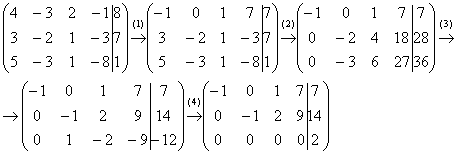


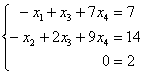
**Випадки, коли система не має рішень (несумісна)**

**Приклад 4**

Вирішити систему лінійних рівнянь

Що відразу впадає в очі в цій системі? Кількість рівнянь - менше, ніж кількість змінних. Якщо кількість рівнянь менше, ніж кількість змінних, то відразу можна сказати, що система або несумісна, або має нескінченно багато рішень. І це залишилося тільки з'ясувати.

Початок рішення зовсім звичайний - запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень наведемо її до ступінчастого виду:



**Якщо в результаті елементарних перетворень отримано рядок виду**http://mathprofi.ru/g/slu_nesovmestnye_sistemy_i_sistemy_s_obshim_resheniem_clip_image012.gif**, де - число, відмінне від нуля, то система несумісна (не має рішень).**

**Домашнє завдання**

1. Розв’язати систему методом Гаусса: а)

б)

**Самостійна робота.** Ранг матриці. Теорема Кронекера – Капеллі.