|  |
| --- |
|  **Тема: Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі****План**1. **Мінор k-го порядку матриці**
2. **Ранг матриці**
3. **Теорема Кронекера-Капеллі**
 |

1. **Мінор k-го порядку матриці**

**Означення.** Нехай є матриця порядку m$⨯$n:

Мінором k-го порядку даної матриці називається визначник, складений з елементів, що стоять на перетині довільно обраних k рядків і k стовпців матриці.

***Приклад.*** У матриці мінорами першого

порядку є самі елементи матриці. Якщо вибрати два рядки (наприклад, 1-й і 3-й) і два стовпці (наприклад, 2-й і 5-й), вийде мінор другого порядку:

 Якщо взяти три рядки і три стовпці (наприклад, 1-й, 3-й, і 4-й), вийде мінор 3-го порядку:

|  |
| --- |
| 1. **Ранг матриці**

**Означення.** Рангом матриці називається найбільший із порядків відмінних від нуля її мінорів.***Приклад.*** У розглянутій вище матриці *А* всі мінори 3-го порядку дорівнюють нулю (це неважко перевірити, минорів 3-го порядку всього десять), а серед минорів 2-го порядку є відмінні від нуля, наприклад, обчислений вище. Значить, ранг матриці *А* дорівнює двом. Це позначається: *r (A)* = 2.***Приклад.*** 1 Знайти *r (А)*, де *А =* $\left(\begin{array}{c} 1 2 3\\ 3 6 9\end{array}\right)$*.****Розв’язок.*** З елементів *А* можна скласти три визначники другого порядку і шість - першого порядку. Всі визначники другого порядку дорівнюють нулю, а першого жоден. Отже, *r (А) =1.***Означення.** Дві матриці *B* і *C* називаються еквівалентними (пишуть: *B ~ C),* якщо їх ранги рівні: *r (B) = r (C).*Наступні перетворення не змінюють рангу матриці:1) перестановка рядків матриці;2) множення будь-якого рядка на дійсне число, відмінне від нуля;3) додавання до елементів одного рядка відповідних елементів іншого рядка;4) викреслювання рядка, всі елементи якого дорівнюють нулю.Зазначені перетворення можна використовувати для визначення рангу матриці.***Приклад.*** Для визначення рангу матриці *A* необхідно виконати ланцюжок наступних перетворень:http://abc.vvsu.ru/Books/Vissh_ma/obj.files/image241.gif~ http://abc.vvsu.ru/Books/Vissh_ma/obj.files/image243.gif(переставили місцями перший і другий рядки) ~ http://abc.vvsu.ru/Books/Vissh_ma/obj.files/image245.gif(перший рядок помножили на -3 і додали до другого; перший рядок помножили на -3 і склали з третім) ~ http://abc.vvsu.ru/Books/Vissh_ma/obj.files/image251.gif(елементи третього рядка помножили на http://abc.vvsu.ru/Books/Vissh_ma/obj.files/image253.gif) ~ http://abc.vvsu.ru/Books/Vissh_ma/obj.files/image255.gif(до елементів третього рядка додали елементи другого рядка). Перетворена матриця має два ненульові рядки, отже, ранг матриці *A* дорівнює двом: *r (A)* = 2.1. **Теорема Кронекера-Капеллі**

**Означення.** Нехай дана система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими:**http://abc.vvsu.ru/Books/Vissh_ma/obj.files/image264.gif**Нехай *А-* матриця системиі *Ар -* розширена матриця системи:**http://abc.vvsu.ru/Books/Vissh_ma/obj.files/image269.gif**, .**Теорема Кронекера-Капеллі**. Для того щоб система лінійних рівнянь була сумісна, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи дорівнював рангу її розширеної матриці.***r (А) = r (АР)***Якщо при цьому ранг дорівнює числу невідомих, то система має єдине рішення, якщо він менше числа невідомих, рішень - безліч.При ***r (А) < r (АР)*** система розв'язку не має.***Приклад.*** Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність:http://abc.vvsu.ru/Books/Vissh_ma/obj.files/image273.gif***Розв’язок.*** Оскільки всі елементи матриці системи входять в розширену матрицю, то ранги обох матриць можна обчислювати одночасно.http://abc.vvsu.ru/Books/Vissh_ma/obj.files/image275.gif Таким чином, матриця *А* містить два ненульових рядки, отже її ранг *r(А)*дорівнює двом. В матриці *Ар* три ненульових рядки, її ранг *r(Ар)* дорівнює трьом. Оскільки  *r(А)*$\ne $*r(АР)*, система несумісна. |

Якщо ***r (А) = r (АР),*** то звертаємо увагу лише на ті рівняння системи, коефіцієнти при невідомих яких утворюють визначник, за яким встановлюється ранг системи. Усі члени таких рівнянь з коефіціетами, що входять у цей визначник, залишаємо в лівій частині, решту переносимо в праву частину. Розв'язуємо утворену систему рівнянь відносно невідомих, що містяться в лівій частині. Невідомі, що містяться в правій частині, можуть набувати довільних значень. Здобутий розв'язок, звичайно, задовольняє рівняння, які не розглядаємо.

***Приклад.*** Розв'язати систему



***Розв’язок***. Складемо матриці: *А =* $\left(\begin{array}{c} 1 2 -1\\ 2 -1 0\\ 3 1 -1\end{array}\right)$, *Ар =* $\left(\begin{array}{c} 1 2 -1 -3\\ 2 -1 0 3\\ 3 1 -1 3\end{array}\right)$

Маємо ***det А = 0,*** але $∆ = \left|\begin{array}{c}1 2\\2-1\end{array}\right|=-5\ne 0.$

Оскільки коефіцієнти третього рівняння не входять в Δ, то це рівняння вилучаємо і розглядаємо систему $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+2x\_{2}=x\_{3}-3;\\2x\_{1}-x\_{2}=3.\end{array}\right.$

Звідси $x\_{1}=\frac{x\_{3}}{5}+\frac{3}{5}, x\_{2}=\frac{2x\_{3}}{5}-\frac{9}{5}, x\_{3}\in R$.

Ці розв’язки задовольняють і вилучене рівняння.

**Домашнє завдання**

Вивчити означення.

Дослідити матрицю на сумісність