**Заняття 11. Раціональний дріб**

**Дробові раціональні вирази**

|  |
| --- |
| Розрізняють цілі і дробові раціональні вирази. Цілий вираз не містить ділення на змінну. Дробовий вираз містить ділення на вираз, до якого входить змінна. |
| **Правила** | **Приклади** |
| Значення змінних, при яких виконуються математичні дії, записані в раціональному виразі, називаються допустимими значеннями змінних. |  $$\frac{4}{х-8}$$     - у цьому раціональному дробі при *х* = 8 в знаменнику отримуємо *х* - 8 = 8 - 8 = 0, тому допустимими значеннями даного дробу є все числа, крім *х* = 8. |
| Щоб знайти допустимі значення раціональної дробу, потрібно прирівняти знаменник до нуля, тобто знайти корені отриманого рівняння і з усіх чисел виключити корені тільки що розв’язаного рівняння. |  Знайти допустимі значення виразу $\frac{x}{3x-x^{2} }$.Прирівняємо знаменник до нуля і вирішимо це рівняння: 3 *х* - *х* 2 = 0, винесемо х за дужки: *х* (3 - *х)* = 0, добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю, тобто *х* = 0 або 3 - *х* = 0. Допустимими значеннями змінної є всі числа, крім *х* = 0 і *х* = 3. Відповідь: *х* - будь-яке число, крім 0 і 3. |

**Дії з раціональними дробами**

|  |  |
| --- | --- |
| **Правила** | **Приклади** |
| СКОРОЧЕННЯ ДРОБІВ |
| Скоротити дріб - означає розділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник. Ця дія обумовлена основною властивістю дробу.Для того, щоб скоротити дріб, потрібно:а) розкласти чисельник і знаменник дробу на множники;б) вибрати спільний множник в чисельнику і знаменнику дробу;в) розділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник. | Скоротити дріб: $\frac{3x-18x^{2}}{15x^{2}-90x^{3}}$.а) розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники, для цього винесемо cпільний множник за дужки:$\frac{3х(1 – 6х) }{15x^{2}(1 – 6х) }$.б) виберемо загальний множник в чисельнику і знаменнику, це 3*х*(1 - 6*х);*в) скоротимо дріб на 3*х*(1 - 6 *х).* Відповідь: $\frac{1}{5x}$. |
| ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ |
| Сума (різниця) двох дробів з однаковими знаменниками дорівнює дробу з тим же знаменником і з чисельником, рівним сумі (різниці) чисельників вихідних дробів. | $$\frac{3а-4}{а-1}+\frac{7-4а}{а-1}=\frac{3а-4+7-4а}{а-1}=\frac{3-а}{а-1};$$$$\frac{3а-4}{а-1}-\frac{7-4а}{а-1}=\frac{3а-4(7-4а)}{а-1}=$$$$=\frac{3а-4-7+4а}{а-1}=\frac{7а-11}{а-1}.$$  |

|  |  |
| --- | --- |
| При додаванні (відніманні) двох раціональних дробів з різними знаменниками потрібно звести дроби до спільного знаменника і виконати додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками. | $$\frac{5}{х-1}+\frac{4}{х+1}=\frac{5(х+1)}{х-1}+\frac{4(х-1)}{х+1}=\frac{5х+5+4х-4}{\left(х-1\right)(х+1)}=\frac{9х+1}{х^{2}-1};$$$$\frac{1}{с}-\frac{3а}{с^{2}+3ас}=\frac{1(с+3а)}{с}-\frac{3а}{с(с+3а)}=\frac{с+3а-3а}{с(с+3а)}=\frac{1}{с+3а}.$$ |
| МНОЖЕННЯ І ДІЛЕННЯ ДРОБІВ |
| Добуток двох раціональних дробів дорівнює дробу, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник дорівнює добутку знаменників дробів. | $$\frac{х-1}{х+1}∙\frac{4х+1}{х-1}=\frac{\left(х-1\right)(4х+4)}{\left(х+1\right)(х-1)}=\frac{\left(х-1\right)4(х+1)}{\left(х+1\right)(х-1)}=4.$$ |
| Частка від ділення двох раціональних дробів замінюється добутком дробу діленого на дріб, зворотний дільнику, і виконується множення цих дробів. Або: частка двох раціональних дробів дорівнює дробу, чисельник якого дорівнює добутку чисельника першого дробу на знаменник другого дробу, а знаменник дорівнює добутку знаменника першого дробу на чисельник другого дробу. | $$\frac{х}{а^{2}-4}:\frac{3х^{2}}{5а-10}=\frac{х(5а-10)}{\left(а^{2}-4\right)3х^{2}}=$$$$=\frac{5х(а-2)}{\left(а-2\right)\left(а+2\right)3х^{2}}=\frac{5}{3х(а+2)}.$$ |
| Зручніше перед множенням або діленням раціональних дробів розкласти їх чисельники і знаменники, якщо це можливо, на множники. |
| ПІДНЕСЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ ДО СТЕПЕНЯ |
| Степінь раціонального дробу дорівнює дробу, у якого чисельник є степенем чисельника, а знаменник - степенем знаменника. | $$\left(\frac{х^{2}-9}{ху+3у}\right)^{3}=\left(\frac{\left(х-3\right)(х+3)}{у(х+3)}\right)^{3}=\left(\frac{х-3}{у}\right)^{3}=\frac{\left(х-3\right)^{3}}{у^{3}};$$$$\left(\frac{5ас^{2}}{3х^{3}}\right)^{4}=\frac{\left(5ас^{2}\right)^{4}}{\left(3х^{3}\right)^{4}}=\frac{5^{4}а^{4}с^{8}}{3^{4}х^{12}}=\frac{625а^{4}с^{8}}{81х^{12}}.$$ |

**Практична частина.**

1. При яких значеннях *х* визначено вираз?
     $а) \frac{1}{х-4}; б) \frac{3х+1}{3х-1}.$

2. Знайти допустимі значення змінної:

     $а) \frac{1}{х-4}-\frac{х+1}{4х-1}; б) \frac{х+3}{х^{2}-9}+\frac{1}{х}.$

3. Скоротити дріб:
$$а) \frac{7ас}{28а^{3}с^{2}}; б) \frac{а^{2}+5а}{а^{2}-25}; в) \frac{х^{2}-у^{2}}{\left(х+у\right)^{2}}; г) \frac{2х^{3}-2у^{3}}{3х-3у};$$

$д) \frac{6а^{2}-6b^{2}}{a^{2}-2ab+b^{2}}; е) \frac{а^{6}-х^{6}}{а^{3}-х^{3}}; ж) \frac{х^{4}-16у^{4}}{х^{2}+4у^{2}}; з) \frac{5х^{2}-10ху+5у^{2}}{2х^{2}-4ху+2у^{2}}.$

4. Скоротити дріб:

     $а) \frac{5а^{3}+а^{2}b+5ab^{2}+b^{3}}{5ab+b^{2}}; б) \frac{\left(m+n\right)^{3}}{2m^{2}n+mn^{2}+m^{3}}; в) \frac{ac-bc+ad-bd}{ac+bc+ad+bd}; $

 $г) \frac{5а^{2}+b^{2}-c^{2}+2ab}{a^{2}-b^{2}+c^{2}+2ac}; д) \frac{х^{2}+2х+1}{х^{2}+8х+7}; е) \frac{х^{2}+5х+6}{х^{2}+4х+4}. $

5. Спростити вираз:
     $а) \frac{ах}{a-b}+\frac{xb}{b-a}; б) \frac{а^{2}}{а-1}+\frac{2а-1}{1-а}; в) \frac{а^{3}}{2-а}+\frac{8}{а-2}; н) \frac{х^{2}}{х-5}-\frac{25}{х-5}.$

6. Виконати дії:

     $а) \frac{3}{2х-2}+\frac{7}{4х-4}; б) \frac{8}{5m+5}-\frac{3}{10m+10}; в) \frac{5b}{аx+ay}-\frac{2a}{5x+5y}. $

7. Виконати множення і ділення дробів:

      $а) \frac{16х^{2}}{7у}∙\frac{12у^{2}}{20х}; б) \frac{46с^{3}}{15d^{3}}:\frac{23}{5cd^{4}}; в) \frac{18m^{3}n^{2}}{7p}:\left(9n^{2}\right); г) \left(\frac{3a}{b}\right)^{2}·\frac{4b}{9a}; д) \frac{х^{2}у}{2с}:\left(-\frac{х^{3}у^{2}}{7с^{3}}\right).$

8. Виконати дії:

       $а) \frac{х^{2}-у^{2}}{6х^{2}у^{2}}:\frac{х+у}{3ху}; б) \frac{4р^{2}-9q^{2}}{p^{2}q^{2}}:\frac{2ap+3aq}{2pq}; в) \frac{a^{2}-b^{2}}{a^{2}}∙\frac{a^{4}}{\left(a+b\right)^{2}}. $

  9. Виконати дії:

       $а) \left(\frac{а}{а+1}+1\right):\left(1-\frac{3а^{2}}{1-а^{2}}\right); б) \left(\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}\right):\frac{4m}{10m-5}; $

 $в) \left(\frac{а+b}{а-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right); г) \left(\frac{х+4у}{2у}-\frac{6у}{4у-х}\right)∙\left(1-\frac{х^{2}-2ху+4у^{2}}{х^{2}-4у^{2}}\right);$

 $д) \left(m^{2}-1\right)∙\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m+1}+1\right); е) \left(а+1-\frac{1}{1-а}\right):\left(а-\frac{а^{2}}{а-1}\right). $

10. Спростити вираз і знайти його числове значення при даних значеннях вхідних в нього змінних:

       $\left(\frac{3}{а-b}-\frac{3a}{b^{2}-a^{2}}\right):\frac{6a+3b}{a^{2}+2ab+b^{2}}, при а=3\frac{1}{4};b= -0,75. $

11. Довести тотожність:

       $\left(\frac{3}{p-2q}+\frac{6q}{4q^{2}-p^{2}}-\frac{2}{p+2q}\right):\left(\frac{p^{2}+4q^{2}}{p^{2}-4q^{2}}+1\right)=-\frac{1}{2p}. $