МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

**Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики**

**ІІІ (обласний) етап**

30 січня 2011 року

7 клас

**1.** Ціна автомобіля спочатку зросла на 7%, а потім знизилася на 15 %. На скільки відсотків змінилася ціна автомобіля після двох переоцінок?.

**2.** Із дошки  по клітинках вирізали  прямокутників . Чи обов’язково із частини, яка залишилася, можна «по клітинках» вирізати прямокутник ? Відповідь обґрунтуйте.

**3.** Антон і Рома написали на  картках усі цілі числа від  до . Після цього розділили усі картки між собою. Кожний із них виклав усі свої картки в ряд і одержав багатоцифрове число. Чи можуть багатоцифрові числа Антона і Роми співпасти? Відповідь обґрунтуйте.

**4.** Яку найбільшу кількість різних натуральних чисел можна вибрати так, щоб сума будь-яких трьох із них була простим числом? Відповідь обґрунтуйте.

**5.** На математичну олімпіаду прийшли  семикласників, причому кожний був знайомий рівно з  семикласниками. Оскільки задачі виявилися складними, то через деякий час олімпіаду покинула деяка кількість семикласників. З’ясувалося, що кожний семикласник, який залишився на олімпіаді, знову мав однакову кількість знайомих серед тих семикласників, що залишилися розв’язувати задачі. Чи були знайомі серед тих семикласників, що пішли з олімпіади? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання завдання відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 10 балів.

*Користування будь-якими зовнішніми джерелами інформації, а також будь-якими електронними засобами забороняється.*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

**Всеукраинская ученическая олимпиада по математике**

**ІІІ (областной) этап**

30 января 2011 года

7 класс

**1.** Цена автомобиля сначала выросла на 7%, а потом знизилась на 15%. На сколько процентов изменилась цена автомобіля после двух переоценок?

**2.** Из доски  по клеточкам вырезали  прямоугольников . Обязательно ли из оставшейся части можно «по клеточкам» вырезать прямоугольник ? Ответ обоснуйте.

**3.** Антон и Рома написали на  карточках все целые числа от  до . После этого разделили все карточки между собой. Каждый из них выложил все свои карточки в ряд и получил многозначное число. Могут ли многозначные числа Антона и Роми совпасть? Ответ обоснуйте.

**4.** Какое наибольшее количество разных натуральных чисел можно выбрать так, чтобы сумма любых трех из них была простым числом? Ответ обоснуйте.

**5.** На математическую олимпиаду пришли  семиклассников, причем каждый был знаком ровно с  семиклассниками. Поскольку задачи оказались сложными, то через некоторое время олимпиаду покинуло некоторое количество семиклассников. Выяснилось, что каждый семиклассник, который остался на олимпиаде, снова имел одинаковое количество знакомых среди тех семиклассников, которые остались решать задачи. Были ли знакомые среди тех семиклассников, которые ушли с олимпиады? Ответ обоснуйте.

На выполнение задания отводится 4 часа.

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

*Использование любых внешних носителей информации, а также любых электронных средств запрещается*

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

**Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики**

**ІІІ (обласний) етап**

30 січня 2011 року

8 клас

**1.** При яких натуральних *n* серед чисел *n, n+1, n+2,… , n2* можна вибрати 4 попарно різних числа *a, b, c, d*, для яких виконується рівність *ab=cd*. Відповідь обґрунтуйте.



**2.** На сторонах ,  і  трикутника  вибрані точки ,  і  так, що , XZ║BC і при цьому . Доведіть, що  – бісектриса кута .

**3.** Знайти усі пари  натуральних чисел, які задовольняють рівнянню:

.

**4.** Двоє гравців по черзі ставлять королів на шахову дошку: перший гравець – білих королів, другий – чорних. Не дозволяється ставити свого короля під бій короля супротивника. Програє той, хто на зможе зробити хід. Хто виграє при правильній грі?

**5.** У Андрійка є  монет, серед яких щонайменше  монет справжні. Відомо, що всі справжні монети важать однаково, а вага будь-якої фальшивої монети відрізняється від ваги справжньої. При цьому різні фальшиві монети можуть мати різну вагу. Чи зможе Андрійко, за не більше ніж 2007 зважувань, на терезах без гир, знайти хоча б одну справжню монету?

На виконання завдання відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 10 балів.

*Користування будь-якими зовнішніми джерелами інформації, а також будь-якими електронними засобами забороняється.*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

**Всеукраинская ученическая олимпиада по математике**

**ІІІ (областной) этап**

30 января 2011 года

8 класс

**1.** При каких натуральных *n* среди чисел *n, n+1, n+2,… , n2* можно выбрать 4 попарно разных числа *a, b, c, d*, для которых выполняется равенство *ab=cd*. Ответ обоснуйте.



**2.** На сторонах ,  и  треугольника  выбраны точки ,  и  так, что , *XZ*║*BC* и при этом . Докажите, что – биссектриса угла .

**3.** Найти все пары  натуральных чисел, которые удовлетворяют уравнению:

.

**4.** Двое игроков по очереди ставят королей на шахматную доску: первый игрок – белых королей, второй – черных. Не разрешается ставить своего короля под бой короля противника. Проиграет тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

**5.** У Андрея есть  монет, среди которых по крайней мере  монет настоящие. Известно, что все настоящие монеты весят одинаково, а вес любой фальшивой монеты отличается от веса настоящей. При этом разные фальшивые монеты могут иметь разный вес. Сможет ли Андрей, за не более чем 2007 взвешиваний, на весах без гирь, найти хотя бы одну настоящую монету?

На выполнение задания отводится 4 часа.

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

*Использование любых внешних носителей информации, а также любых электронных средств запрещается*

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

**Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики**

**ІІІ (обласний) етап**

30 січня 2011 року

10 клас

**1.** Розв’язати систему рівнянь



**2.** В опуклому чотирикутнику  точки  і  обрано на сторонах  і  відповідно. Нехай  – точка перетину відрізків  і . Відомо, що в чотирикутники  та  можна вписати кола. Доведіть, що

а) в чотирикутник  також можна вписати коло;

б) кола, вписані в трикутники  і , дотикаються одне до одного.

**3.** Знайти всі такі пари додатних раціональних чисел , що числа

 та 

будуть цілими. (Тут , а  – найбільше ціле число, яке не перевищує .)

**4.** Нехай  та  – будь-які дійсні числа. Доведіть, що

.

При яких значеннях  та  досягається знак рівності?

**5.** Шаховий король обійшов шахову дошку, побувавши на кожному полі по одному разу і повернувся останнім ходом на початкове поле. Доведіть, що при цьому король зробив парну кількість діагональних ходів.

На виконання завдання відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 10 балів.

*Користування будь-якими зовнішніми джерелами інформації, а також будь-якими електронними засобами забороняється.*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

**Всеукраинская ученическая олимпиада по математике**

**ІІІ (областной) этап**

30 января 2011 года

10 класс

**1.** Решить систему уравнений



**2.** В выпуклом четырехугольнике  точки  и  выбрано на сторонах  и  соответственно. Пусть  – точка пересечения отрезков  и . Известно, что в четырехугольники  и  можно вписать окружности. Докажите, что

а) в четырехугольник  также можно вписать окружность;

б) окружности, вписанные в треугольники  и , касаются друг друга.

**3.** Найти все такие пары положительных рациональных чисел , что числа

 и 

будут целыми. (Здесь , а  – наибольшее целое число, не превышающее .)

**4.** Пусть  и  – любые действительные числа. Докажите, что

.

При каких значениях  и  достигается знак равенства?

**5.** Шахматный король обошел шахматную доску, побывав на каждом поле по одному разу и вернулся последним ходом на исходное поле. Докажите, что при этом король сделал четное количество диагональных ходов.

На выполнение задания отводится 4 часа.

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

*Использование любых внешних носителей информации, а также любых электронных средств запрещается*

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

**Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики**

**ІІІ (обласний) етап**

30 січня 2011 року

11 клас

**1.** Розв’язати рівняння

.

**2.** Для довільних дійсних чисел , , , що належать числовому проміжку , доведіть нерівність

.

**3.** Дано рівнобедрений трикутник  ,  – його медіана. На цій медіані відмітили точку  так, що . Доведіть, що бісектриса кута  перпендикулярна прямій .

**4.** Чи існує опуклий многогранник, у якого:

а) немає трьох граней з однаковою кількістю ребер;

б) всі грані мають різну кількість ребер?

**5.** Знайти дроби  і , якщо числа ,  і  вибрані так, що обидва дроби додатні і один з них втричі більший за другого.

На виконання завдання відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 10 балів.

*Користування будь-якими зовнішніми джерелами інформації, а також будь-якими електронними засобами забороняється.*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

**Всеукраинская ученическая олимпиада по математике**

**ІІІ (областной) этап**

30 января 2011 года

11 клас

**1.** Решить уравнение

.

**2.** Для произвольных действительных чисел , , , принадлежащих числовому промежутку , докажите неравенство

.

**3.** Дано равнобедренный треугольник  ,  – его медиана. На этой медиане от метили точку  так, что . Докажите, что биссектриса угла  перпендикулярна прямой .

**4.** Существует ли выпуклый многогранник, у которого:

а) нет трех граней с одинаковым количеством ребер;

б) все грани имеют разное количество ребер?

**5.** Найти дроби  и , если числа ,  и  выбраны так, что обе дроби положительны и одна из них втрое больше другой.

На выполнение задания отводится 4 часа.

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

*Использование любых внешних носителей информации, а также любых электронных средств запрещается*