**Некоторые олимпиадные идеи.**

**Идея №1**

**Поиск родственных задач**

Если задача трудна, то попытайтесь найти и решить более простую «родственную» задачу. Это часто даёт ключ к решению исходной. Помогают следующие соображения:

* рассмотреть частный (более простой) случай, а затем обобщить идею решения;
* разбить задачу на подзадачи (например, необходимость и достаточность);
* обобщить задачу (например, заменить конкретное число переменной);
* свести задачу к более простой (см. тему «Причёсывание задач»).

**Пример 1.** В угловой клетке таблицы 5 х 5 стоит плюс, а в остальных клетках стоят минусы. Разрешается в любой строке или любом столбце поменять все знаки на противоположные. Можно ли за несколько таких операций сделать все знаки плюсами?

*Решение.* Возьмём квадрат поменьше, 2 х 2 (один плюс и три минуса). Можно ли сделать все знаки плюсами? Нельзя.

Воспользуемся этим результатом: выделим в квадрате 5 х 5 квадратик 2 х 2, содержащий один плюс. Про него уже известно, что сделать все знаки плюсами нельзя. Значит, в квадрате 5 х 5 и подавно.

**Пример 2.** Постройте общую внешнюю касательную к двум окружностям.

*Решение.* Если одна из окружностей будет точкой, то задача станет легче.

Пусть *A*1и *r*1 – центр и радиус меньшей окружности, *A*2 и *r*2 – центр и радиус большей окружности. Рассмотрим прямую, проходящую через *A*1 и параллельную общей касательной. Эта прямая удалена от *A*2 на расстояние *r*2 – *r*1. Построим окружность с центром *A*2 и радиусом *r*2 – *r*1. Из точки *A*1 проведём касательную к новой окружности. Пусть *C* – точка касания. На прямой *A*2*C* лежит искомая точка касания.

Задачи

* + - 1. Легко ли распилить кубик 3 х 3 х 3 на 27 кубиков шестью распилами. Можно ли уменьшить число распилов, если разрешается перекладывать части перед тем как их пилить?
			2. Докажите, что в выпуклом *n*-угольнике сумма внутренних углов равна 180о(*n* – 2).
			3. Докажите, что *n*(*n + 1*)(*n + 2*) делится на 6 при любом целом *n*.
			4. Решите уравнение (*x*2 + *x – 3*)2 + *2x*2 + *2x – 5 = 0.*
			5. (Для тех, кто знаком с понятием инверсии). Постройте окружность, касательную к трём данным.

### Идея №2

### Доказательство от противного

Рассуждают примерно так: «Допустим, исходное утверждение неверно. Если из этого получим противоречие, то исходное утверждение верно».

**Пример 1.** Существует ли самое большое число?

***Решение****.* Допустим, что существует. Тогда прибавим к этому числу единицу и получим число ещё большее. Противоречие. Значит, наше предположение неверно и такого числа не существует.

**Пример 2.** Пять мальчиков нашли девять грибов. Докажите, что хотя бы двое из них нашли грибов поровну.

***Решение****.* Допустим, что мальчики нашли разное количество грибов. Расставим их по возрастанию числа найденных грибов. Первый собрал не меньше нуля, второй – не меньше одного, третий – не меньше двух, четвёртый – не меньше трёх, пятый – не меньше четырёх. Всего – не меньше десяти. Противоречие.

**Пример 3.** Докажите, что не существует треугольной пирамиды, у которой к каждому ребру примыкает тупой угол на одной из граней.

***Решение***. Допустим, что такая пирамида существует. Поскольку в треугольнике против тупого угла лежит самая длинная сторона, то для каждого ребра найдётся более длинное ребро. Это невозможно, так как количество рёбер у пирамиды конечно. Противоречие.

*Замечание.* Вместе с рассуждением от противного мы использовали «Правило крайнего».

Задачи

1. По кругу расставлены 100 чисел. Известно, что каждое число равно среднему арифметическому двух соседних. Докажите, что все числа равны.
2. На плоскости отмечено несколько точек. Известно, что любые четыре из них являются вершинами выпуклого многоугольника.
3. Докажите, что если (*m –* 1)! *+* 1 делится на *m*, то число *m* – простое.
4. Существует ли выпуклый многоугольник, у которого больше трёх острых углов?
5. Докажите, что не существует многогранника, у которого число граней нечётно и каждая грань имеет нечётное число вершин.

### Идея №3

### Чётность

Многие задачи легко решаются, если заметить, что некоторая величина имеет определённую чётность. Из этого следует, что ситуации, в которых эта величина имеет другую чётность, невозможны. Иногда эту величину (функцию) надо сконструировать, например, рассмотреть чётность суммы или произведения, разбить объекты на пары, заметить чередование состояний, раскрасить объекты в 2 цвета. Чётность в играх – это возможность сохранить чётность некоторой величины при своём ходе (см. темы «Инварианты», «Делимость», «Игры»).

**Пример 1.** Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка 1м). Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

***Решение****.* Поскольку кузнечик вернулся в исходную точку, количество прыжков вправо равно количеству прыжков влево, поэтому общее количество прыжков чётно.

**Пример 2.** Существует ли замкнутая 7-звенная ломаная, которая пересекает каждое своё звено ровно 1 раз?

***Решение****.* Допустим, что существует. Тогда пересекающиеся звенья образуют пары. Следовательно, количество звеньев должно быть чётным. Противоречие.

**Пример 3.** У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечётное число рук, чётно.

***Решение***. Назовём марсиан с чётным числом рук чётными, а с нечётным – нечётными. Поскольку руки образуют пары, то общее число рук чётно. Общее число рук у чётных марсиан чётно, поэтому общее число рук у нечётных марсиан тоже чётно. Следовательно, число нечётных марсиан чётно.

Задачи

1. Можно ли разменять 25 рублей десятью купюрами достоинством 1, 3 и 5 рублей?
2. Девять шестерёнок зацеплены по кругу: первая со второй, вторая с третей и т.д., девятая с первой. Могут ли они вращаться? А если шестерёнок *n*?
3. 100 фишек поставлены в ряд. Разрешается менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли таким способом переставить фишки в обратном порядке?
4. Даны 6 чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять 1. Можно ли все числа сделать равными?
5. Все кости домино выложили в цепочку по правилам игры. На одном конце оказалась пятёрка. Что может оказаться на другом конце?
6. Может ли прямая, не проходящая через вершины 11-угольника, пересекать все его стороны?
7. На столе стоят 7 перевёрнутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?
8. В языке дикарей хотийцев всего два звука: «ы» и «у». Два слова означают одно и тоже, если одно получается из другого при помощи некоторого числа следующих операций: пропуска идущих подряд звуков «ыу» или «ууыы» и добавления в любом месте звуков «уы». Означают ли одно и тоже слова «уыу» и «ыуы»?
9. На доске написаны числа 1, 2, … , 101. Разрешается стереть любые два числа и написать их разность. Повторив эту операцию 100 раз, мы получим одно число. Докажите, что это число не может быть нулём.
10. Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью и каждые 15 минут поворачивает на 900. Докажите, что она может вернуться в исходную точку через целое число часов.
11. В трёх вершинах квадрата сидели кузнечики. Они стали играть в чехарду: один из кузнечиков прыгает в точку, симметричную относительно другого. Сможет ли хоть один кузнечик попасть в четвёртую вершину квадрата?

### Идея №4

### Обратный ход

Если в задаче некоторая операция, и эта операция обратима, то можно сделать «обратный ход» от конечного результата к исходным данным. (Например, надо вынести шкаф из комнаты. Пройдёт ли он через дверь? Пройдёт, потому что через дверь его внесли). Анализ с конца используется в играх при поиске выигрышных и проигрышных ситуаций.

**Пример 1.** На озере расцвела одна лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на 20-й день всё озеро покрылось цветами. На который день покрылась цветами половина озера?

***Решение****.* Начнём с конца. Пусть сегодня половина озера покрылась цветами. Через сколько дней покроется всё озеро? Завтра! И это будет 20-й день.

***Ответ:*** за 19 дней.

**Пример 2.** Три мальчика делили 120 фантиков. Сначала Петя дал Ване и Толе столько фантиков, сколько у них было. Затем Ваня дал Толе и Пете столько, сколько у них стало. И наконец Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к этому моменту имелось. В результате всем досталось поровну. Сколько фантиков было у каждого в начале?

***Решение****.* Мы знаем, что в конце у всех оказалось по 40 фантиков, а перед этим у Пети и Вани было вдвое меньше. Значит, у Пети и Вани было по 20, а у Толи – 80. А перед этим у Пети и Толи было вдвое меньше, т.е. у Пети было 10, у Толи – 40, а у Вани – 70. И наконец возьмём половину фантиков у Вани и Толи и вернём Пете.

***Ответ:*** у Пети было 65 фантиков, у Вани – 20, а у Толи – 35.

**Пример 3.** В квадрате *ABCD* на стороне *АВ* внутри квадрата построили равнобедренный треугольник *АВЕ* с углами при основании *АВ* равными 150. Докажите, что треугольник *CDE* правильный.

***Решение***. Решим обратную задачу: докажем, что ели треугольник *CDE*1 правильный, то у треугольника *ABE*1 углы при основании *АВ* равны 150.

Поскольку /*ADE*1 = 300 и *DE*1 = *AD*, то /*E*1*AD* = /*AE*1*D* = 750. Значит, /*E*1*AB* = 150. Аналогично /*E*1*BA* = 150.

Итак, мы доказали, что вершина *Е*1 правильного треугольника *CDE*1 попадает как раз в ту точку *Е*, которая дана в условии задачи. Значит, треугольник *CDE* правильный.

Задачи

1. Однажды царь наградил крестьянина яблоком из своего сада. Пошёл крестьянин к саду и видит: весь сад огорожен тройным забором, в каждом заборе только одни ворота, и в каждых воротах стоит сторож. Подошёл крестьянин к первому сторожу и показал царский указ, а сторож ему в ответ: «Иди возьми, но при выходе отдашь мне половину тех яблок, что несёшь, и ещё одно». То же ему сказали второй и третий сторож. Сколько яблок должен взять крестьянин, чтобы после расплаты со сторожами у него осталось одно яблоко?
2. Трём братьям дали 24 бублика так, что каждый получил на три бублика меньше, чем ему лет. Меньший брат был сообразительный и предложил поменять часть бубликов: «Я, - сказал он, - оставлю половину бубликов, а другую разделю между вами поровну; после этого средний брат также оставит половину бубликов, а другую разделит поровну между мной и старшим братом. В конце старший брат поделит также». Так они и сделали. Оказалось, что все получили поровну. Сколько лет каждому брату?
3. Учитель раздавал школьникам открытки. Первому он дал одну открытку и одну десятую оставшихся. Второму он дал две открытки и одну десятую оставшихся и т.д. Девятому он дал девять открыток и одну десятую оставшихся. Оказалось, что все получили поровну и все открытки были розданы. Сколько всего было открыток?

### Идея №5

### Подсчёт двумя способами

При составлении уравнений выражают некоторую величину двумя способами (например, путь или время). Иногда некоторую величину оценивают двумя способами, тогда получают или неравенство, или величины разной чётности. Эта идея тесно связана с идеей инварианта. Она бывает источником противоречия (см. тему «Доказательство от противного»).

**Пример 1.** Можно ли расставить числа в квадратной таблице 5 х 5 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была положительной, а в каждом столбце отрицательной?

***Решение***.Допустим, что можно. Найдём сумму всех чисел. Если считать её по строкам, то сумма будет положительной, а если по столбцам – то отрицательной. Противоречие. Значит, так расставить числа нельзя.

**Пример 2.** В классе 27 человек. Каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, а каждая девочка – с пятью мальчиками. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

***Решение****.* Пусть *m* – число мальчиков, *d* – число девочек. Найдём общее количество «дружб» двумя способами. Поскольку каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, то это число равно 4*m*, с другой стороны, каждая девочка дружит с пятью мальчиками, значит это число равно 5*d*. Получаем уравнение 4*m* = 5*d*. Поскольку *m* + *d* = 27, то *m* = 15, *d* = 12.

***Ответ:*** 15 мальчиков, 12 девочек.

**Пример 3.** Найдите сумму геометрической прогрессии ***S* = 1 + 3 + 9 +…+ 3*n***.

***Решение***. Заметим, что следующую сумму можно получить двумя способами: либо добавить 3*n*, либо умножить все слагаемые на 3, а потом прибавить 1. Получаем уравнение: *S +* 3*n* = 3\**S* + 1. Отсюда *S* = (3*n* – 1)/2.

**Пример 4.** Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

***Решение****.* Пусть в треугольнике *ABC* проведены две медианы: *АА*1 и *СС*1, их точка пересечения *О*. Проведём отрезки *ВО* и *ОВ*1. Воспользуемся тем, что медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника. Действительно, у этих треугольников равны основания и общая высота. Отметим пары равновеликих треугольников: *OAC*1 и *ОВС*1, *ОВА*1 и *ОСА*1, *ОАВ*1 и *ОСВ*1. Кроме того треугольники *ОАС*1 и *ОСА*1 равновелики, поскольку площадь каждого из них составляет половину площади исходного треугольника *АВС*. Значит,

равновеликими являются треугольники *АОС*1 и *СОА*1, поскольку их можно получить из треугольников *ОАС*1 и *ОСА*1 выбрасыванием общей части. Отсюда следует, что равны площади четырёхугольников *АВОВ*1 и *СВОВ*1. С другой стороны, медиана *ВВ*1 тоже делит *АВС* на две равновеликие части, поэтому точка *О* должна лежать на отрезке *ВВ*1.

Задачи

1. Можно ли соединить 5 городов дорогами так, чтобы каждый город был соединён с тремя другими?
2. В каждой клетке прямоугольной таблицы размером *m x k* клеток написано число. Сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна 1. Докажите, что *m = k*.
3. Существует ли выпуклый 1978-угольник, все углы которого выражаются целым числом градусов?
4. Найдите сумму коэффициентов многочлена *(x*3 – *x + 1)*100.
5. Докажите, что не существует многогранника, у которого
а) все грани – шестиугольники;
б) в каждой вершине сходятся 6 граней.
6. Треугольник разрезали на выпуклые четырёхугольники. Докажите, что хотя бы у одного четырёхугольника есть угол не меньше 1200.
7. В городе отличников от каждой площади отходит ровно 5 улиц. Докажите, что число площадей чётно, а число улиц делится на 5 (улицы соединяют площади).
8. В квадрате со стороной единица поместили несколько отрезков, параллельных сторонам квадрата (квадрату принадлежит граница, а отрезкам принадлежат концы). Отрезки могут пересекать друг друга. Сумма их длин равна 18. Докажите, что среди частей, на которые квадрат разбит объединением отрезков, найдётся такая, площадь которой не меньше 0,01.
*Указание.* Оцените двумя способами сумму периметров частей. Чем меньше площадь, тем относительно больший периметр на неё приходится.

**Идея №6**

### Инварианты

*Инвариант* – величина, которая не изменяется в результате некоторых операций (например, разрезание и перестановка частей фигур не меняет суммарной площади). Если инвариант различает два положения, то от одного нельзя перейти к другому. В качестве инварианта может использоваться *чётность* или *раскраска*. В задачах про сумму цифр используют остатки от деления на 3 или 9. *Полуинвариант* – величина, изменяющаяся только в одну сторону (т.е. которая может только увеличиваться или только уменьшаться). Понятие полуинварианта часто используется при доказательствах остановки процессов.

**Пример 1.** На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать с неё два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать один банан и один ананас, то вырастет один банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если известно, сколько бананов и ананасов росло вначале.

***Решение****.* Чётность числа бананов не меняется, поэтому, если число бананов было чётным, то оставшийся плод – ананас, если число бананов было нечётным, то – банан.

**Пример 2.** В одной клетке квадратной таблицы 4 х 4 стоит знак минус, а в остальных стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что, сколько бы мы не проводили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

***Решение****.* Заменим знак плюс на число 1 и знак минус на число –1. Заметим, что *произведение всех чисел в таблице* не меняется при смене знака у всех чисел столбца или строки, так как одновременно меняется знак у четырёх чисел. В начальном положении это произведение равно –1, а в таблице из одних плюсов +1, чем и доказана невозможность перехода.

**Пример 3.** На прямой стоят две фишки: слева красная, справа синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд (между фишками или с краю) и удаление пары соседних одноцветных фишек (между которыми нет других фишек). Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную?

***Решение***. Рассмотрим число разноцветных пар (не только соседних), где левая фишка красная, и заметим, что чётность этого показателя не меняется. Но в исходной ситуации наш показатель равен 1, а в желаемой ситуации – нулю. Поэтому перейти к желаемой ситуации невозможно.

**Пример 4.** На острове Серобуромалин живут хамелеоны: 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых. Если 2 хамелеона разных цветов встречаются, то они оба меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета?

*Указание.* Рассмотрите остатки от деления чисел Б бурых, С серых и М малиновых хамелеонов на 3 и проверьте, что попарные разности у этих остатков не меняются.

**Пример 5.** Докажите, что в игре «15» нельзя поменять местами фишки «15» и «14», оставив остальные на месте.

*Идея решения.* Рассмотрим «пустое поле» как отдельную фишку. Мы можем только менять «пустую фишку» с соседними. Поскольку пустая фишка должна попасть в исходное поле, число наших операций должно быть чётным. Поэтому мы можем получить конфигурации, отличающиеся от начальной только чётным числом перестановок.

**Пример 6.** На 44 деревьях, расположенных по кругу сидели по весёлому чижу. Время от времени какие-то два чижа перелетают на соседнее дерево – один по часовой стрелке, а другой – против. Могут ли все чижи собраться на одном дереве?

***Решение***. Пронумеруем деревья по кругу с 1-го по 44-е. Сумма номеров деревьев, на которых сидят чижи либо не меняется, либо уменьшается на 44, либо увеличивается на 44. Тем самым, остаток от деления этой суммы номеров на 44 не меняется. Изначально этот остаток равен 22, а если все чижи усядутся на одно дерево, то он будет равен нулю. Поэтому чижи не смогут собраться на одном дереве.

Задачи

1. Можно ли разрезать выпуклый 17-угольник на 14 треугольников.
2. Можно ли круг разрезать на несколько частей и сложить квадрат? (Разрезы – это прямые и дуги окружностей).
3. Болельщик Вася нарисовал расположения игроков на футбольном поле к началу первого и второго таймов. Оказалось, что некоторые игроки поменялись местами, а остальные остались на своих местах. При этом расстояние между любыми двумя игроками не увеличилось. Докажите, что все эти расстояния не изменились.
4. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин праивльного *n*-угольника до любой прямой, проходящей через его центр есть величина постоянная.
5. (сизифов труд). На горе 1001 ступенька, на некоторых лежат камни, по одному на ступеньке. Сизиф берёт любой камень и переносит его вверх на ближайшую свободную ступеньку (т.е. если ближайшая ступенька свободна, то на неё, а если она занята, то на несколько ступенек вверх до первой свободной). После этого Аид скатывает на одну ступеньку вниз один из камней, у которых предыдущая ступенька свободна. Камней 500 и первоначально они лежали на нижних 500 ступеньках. Сизиф и Аид действуют по очереди, начинает Сизиф. Цель Сизифа положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли Аид ему помешать?
6. Столица страны соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён авиалиниями ровно с 10 городами (если А соединён с В, то В соединён с А). Известно, что из любого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Докажите, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так что возможность попасть из любого города в любой другой сохранится.
7. Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари из двух враждующих станов. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Докажите, что число рыцарей делится на 4.

### Идея №7

### Принцип Дирихле

В простейшем виде его выражают так: «Если десять кроликов сидят в девяти ящиках, то в некотором ящике сидят не меньше двух кроликов».

Общая формулировка: *«Если n кроликов сидят в k ящиках, то найдётся ящик, в котором сидят не меньше чем n/k кроликов, и найдётся ящик, в котором сидят не больше чем n/k кроликов»*. Пусть вас не смущает дробное число кроликов – если получится, что в ящике не меньше 7/3 кроликов, значит, их не меньше трёх.

Доказательство принципа Дирихле простое, но заслуживает внимания, поскольку похожие рассуждения часто встречаются.

Допустим, что в каждом ящике сидят меньше чем *n/k* кроликов. Тогда во всех ящиках вместе кроликов меньше чем *n/k\*k = n*. Противоречие.

Формулировка принципа Дирихле кажется очевидной, однако трудность состоит в том, что в задачах не указаны ни кролики, не ящики.

Зная принцип Дирихле, можно догадаться, в каких случаях его применять. Например, если каждому элементу множества *А* соответствует ровно один элемент множества *В*, то элементы *А* можно назвать кроликами, а элементы *В* – ящиками.

Принцип Дирихле бывает непрерывным: *«Если n кроликов съели m кг травы, то какой-то кролик съел не меньше m/n кг и какой-то съел не больше m/n кг»* (а если кто-то съел больше среднего, то кто-то съел меньше среднего).

Заметим, что в последней формулировке кролики играют роль ящиков для травы, а трава – роль кроликов, сидящих в ящиках.

**Пример 1.** В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

***Решение****.* Всего в году 365 дней. Назовём дни ящиками, а учеников кроликами. Тогда в некотором ящике сидят не меньше 400/366 кроликов, т.е. больше одного. Следовательно, не меньше двух.

Можно рассуждать от противного. Допустим, что каждый день отмечают день рождения не больше одного ученика, тогда всего учеников не больше 366. Противоречие.

**Пример 2.** Кот Базилио пообещал Буратино открыть великую тайну, если он составит чудесный квадрат 6 х 6 из чисел +1, -1, 0 так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.

***Решение****.* Допустим, что квадрат составлен. Тогда суммы чисел могут меняться от –6 до +6. Всего 13 значений. Строк в квадрате 6, столбцов 6, диагоналей 2. Получаем 14 различных сумм. Противоречие, значит, составить такой квадрат невозможно.

**Пример 3.** На планете Земля океан занимает больше половины площади поверхности. Докажите, что в мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.

***Решение***. Отразим океан симметрично относительно центра Земли. Поскольку сумма площадей океана и его образа превышает площадь земной поверхности, то существует точка, принадлежащая океану и его образу. Возьмём эту точку вместе с противоположной к ней.

**Пример 4.** На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольных работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2,3,4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на контрольных?

***Решение.*** Рассмотрим множество наборов из трёх оценок за соответствующие контрольные. Количество таких наборов равно 43 или 64 (4 возможности за каждую из трёх контрольных). Поскольку число учащихся больше 64, по принципу Дирихле каким-то двум учащимся отвечает один набор оценок.

Задачи

1. В классе 30 учеников. Во время контрольной работы Петя сделал 13 ошибок, а остальные – меньше. Докажите, что найдутся три ученика, сделавшие одинаковое число ошибок.
2. На земле больше 4 миллиардов человек, которые моложе 100 лет. Докажите, что на Земле есть два человека, родившихся в одну и ту же секунду.
3. На плоскости проведено 12 прямых. Докажите, что какие-то две из них образуют угол не больше 15о.
4. В ящике лежат носки: 10 чёрных, 10 синих, 10 белых. Какое наименьшее количество носков надо вынуть не глядя, чтобы среди вынутых оказалось два носка а) одного цвета; б) разных цветов; в) чёрного цвета?
5. На карьере добыли 36 камней. Их веса соответственно 490 кг, 495 кг, 500 кг, …, 665 кг (арифметическая прогрессия). Можно ли увезти эти камни на семи трёхтонных грузовиках?
6. Какое наименьшее число карточек спортлото «6 из 49» надо купить, чтобы наверняка хоть на одной из них был угадан хоть один номер?
7. Докажите, что среди любых пяти человек есть двое с одинаковым числом знакомых среди этих пяти человек. (Возможно, эти двое ни с кем не знакомы).
8. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 100.
9. Квадратная таблица (2*n* + 1) x (2*n* + 1) заполнена числами от 1 до 2*n* + 1 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце были представлены все эти числа. Докажите, что если это расположение симметрично относительно главной диагонали, то на главной диагонали тоже представлены все эти числа.
10. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трёх из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.
11. Комиссия из 60 человек провела 40 заседаний, причём на каждом заседании присутствовало ровно 10 членов комиссии. Докажите, что какие-то два члена комиссии встречались на её заседаниях по крайней мере дважды.
12. На столе лежат 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок будет больше, чем сумма расстояний от центра стола до центров часов.
13. Каждая из 9 прямых разбивает квадрат на два четырёхугольника, площади которых относятся как 2:3. Докажите, что по крайней мере три из этих прямых проходят через одну точку.

### Идея №8

### Делимость и остатки

Допустим, нас интересуют остатки от деления чисел на 10 (последняя цифра). Как найти последнюю цифру произведения двух чисел? Достаточно перемножить последние цифры сомножителей и взять последнюю цифру результата. Аналогичная теорема верна для любого делителя: остаток произведения или суммы двух чисел определяется остатками этих чисел – это создаёт «арифметику остатков».

Остаток может выступать в роли инварианта (например, остаток от деления на 9 в задачах про сумму цифр).

**Пример 1.** Докажите, что существует бесконечно много чисел, которые не представимы в виде суммы двух квадратов.

***Решение****.* Достаточно доказать, что числа, имеющие при делении на 4 остаток 3, не представимы в виде суммы двух квадратов. Из равенств (2*k*)2 = 4*k*2, (2*k* + 1)2 = 4*k*2 + 4*k* + 1 следует, что квадрат целого числа при делении на 4 даёт остаток 0 или 1. Поэтому сумма двух квадратов не может иметь остаток 3.

**Пример 2.** Докажите, что число, в десятичной записи которого участвуют три единицы и несколько нулей, не может быть квадратом.

***Решение****.* Если такое число существует, то оно делится на 3, но не делится на 9 (по признакам делимости на 3 и на 9). Но если число делится на 3 и является полным квадратом, то оно делится на 9. Противоречие.

Задачи

1. Какие числа можно представить в виде разности двух квадратов целых чисел?
2. Если *p* – простое число, большее 3, то *p*2 – 1 делится на 24.
3. При каких *n* число 2*n* – 1 делится на 7?
4. Известно, что сумма нескольких натуральных чисел делится на 6. Докажите, что сумма кубов этих чисел тоже делится на 6.
5. Если в целочисленной арифметической прогрессии встретился квадрат целого числа, то квадратов в ней бесконечно много. Докажите.

### Идея №9

### Алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида позволяет находить наибольший общий делитель чисел, решать линейные уравнения в целых числах. Алгоритм основан на следующем факте: «*Если при делении числа a на b получается остаток r, то* НОД(*a, b*) = НОД(*b, r*)».

Пусть даны два натуральных числа *n*1 и *n*2. Поделим *n*1 на *n*2 с остатком. Обозначим остаток *n*3. Поделим *n*2 на *n*3 с остатком и т.д. (каждый раз мы делим предыдущий делитель на полученный остаток) до тех пор, пока остаток не будет равен нулю. Последний ненулевой остаток и будет равен наибольшему общему делителю исходных чисел *n*1 и *n*2.

Отметим, что этот алгоритм может быть применён также для нахождения наибольшего общего делителя многочленов и других объектов более общей природы.

**Пример 1.** Разделить угол 19о на 19 равных частей.

***Решение****.* Отложим 19 раз угол 19о по кругу. В результате сместимся на 1о, поскольку 19\*19о = 361о = 360о + 1о. Таким образом мы получили «остаточный» угол в 1о, с помощью которого осуществим деление.

**Пример 2.** Докажите, что числа 2*m* – 1 и 2*n* – 1 взаимно простые тогда и только тогда, когда числа *n* и *m* взаимно простые.

***Решение****.* Пусть *n* > *m*. Обозначим *F*(*m, n*) = НОД(2*n* – 1, 2*m* – 1). Тогда *F*(*m, n*) = НОД(2*n* – 1 – (2*m* – 1), 2*m* – 1) = НОД((2*n-m* – 1)\*2*m*, 2*n* – 1) = НОД(2*n-m* – 1, 2*m* – 1) = *F*(*n – m, n*). Таким образом, пару чисел (*m, n*) можно заменить на пару (*n – m, n*). С помощью алгоритма Евклида мы придём к паре (*d,* 0), где *d* = НОД(*m, n*). Итак, НОД(2*n* – 1, 2*m* – 1) = НОД(2*d* – 1, 20 – 1) = 2*d* – 1. В нашем случае *d* = 1, 2*d* – 1 = 1, поэтому числа 2*n* – 1 и 2*m* – 1 взаимно просты.

Задачи

1. Решите уравнение в натуральных числах 7*x* – 11*y* = 1.
2. Даны углы 36о и 25о. Постройте угол 1о.
3. Числа *m* и *n* – взаимно просты. Докажите, что уравнение *mx* + *ny* = 1 имеет решение в целых числах.
4. Один прибор делает пометки на длинной ленте через каждые *m* см, другой – через каждые *n* см (*m* и *n* – взаимно простые). Верно ли, что какая-то синяя пометка окажется на расстоянии не большем 1 см от какой-то красной?
5. Разрешается сдвигать фишку вдоль числовой прямой на +1 и на +\/2. Докажите, что из любого начального положения её можно продвинуть к началу координат ближе чем на 0,0001.
6. «Крокодилом» называется фигура, ход которой заключается в прыжке на клетку, в которую можно попасть сдвигом на одну клетку по вертикали или по горизонтали, а затем на *N* клеток в перпендикулярном направлении (при *N* = 2 «крокодил» - это шахматный конь). при каких *N* «крокодил» может пройти с любой клетки бесконечной шахматной доски на любую другую?

### Идея №10

### Правило крайнего

Особые, крайние объекты часто служат «краеугольным камнем» решения. Так, например, рассматривают наибольшее число, ближайшую точку, угловую точку, вырожденную окружность, предельный случай. Поэтому полезно сразу рассматривать особые, крайние объекты.

В задачах на правило крайнего работает метод минимального контрпримера: допустим, утверждение задачи неверно. Тогда существует минимальный в некотором смысле контрпример. И если окажется, что его можно ещё уменьшить, то получится искомое противоречие.

**Пример 1.** Плоскость разрезана вдоль *N* прямых общего положения. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

***Решение****.* Выберем прямую и рассмотрим точки пересечения других прямых между собой. Среди этих точек пересечения выберем ближайшую к нашей прямой. Две прямые, проходящие через эту точку, пересекают исходную прямую и образуют с ней треугольник. Этот треугольник не могут пересекать другие прямые (докажите).

**Пример 2.** Докажите, что у многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

***Решение****.* Рассмотрим грань с наибольшим числом сторон. Обозначим эту грань *G*, число её сторон *n*. К каждой стороне *G* примыкает грань многогранника, всего примыкающих граней *n*. Число сторон в каждой грани заключено между 3 и *n* – 1, всего *n* – 3 возможности. Поскольку число возможностей меньше числа примыкающих граней, то по **принципу Дирихле** одна из возможностей повторится. Таким образом, среди граней, примыкающих к грани G, найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

**Пример 3.** На шахматной доске расставлены числа, каждое из которых равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все числа равны.

***Решение***. Рассмотрим наибольшее из чисел. Оно равно своим соседям. Поскольку любые два числа соединяются цепочкой соседних чисел, все числа равны.

**Пример 4.** Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадёт на сторону.

*Указание.* Рассмотрите ближайшую точку границы.

**Пример 5.** Докажите, что число 1 + 1/2 + 1/3 + … + 1/*n* не является целым.

*Указание.* Рассмотрите максимальную степень двойки, входящую в знаменатель членов суммы.

Правилу крайнего родственно рассмотрение ситуации на бесконечности (в *асимптоматике*).

**Пример 6.** На плоскости расположено 10 точек и 10 прямых. Докажите, что можно найти такую точку, расстояние от которой до любой прямой будет меньше, чем до любой из точек.

***Идея решения***. Выберем направление, не перпендикулярное ни одной из прямых. Будем двигать по этому направлению точку с единичной скоростью. Скорость удаления этой точки относительно любой отмеченной точки стремится к единице, а скорость её удаления относительно любой отмеченной прямой меньше единицы.

**Пример 7.** Ограниченная фигура на плоскости имеет площадь *S* > 1. Докажите, что её можно сдвинуть на целочисленный вектор так, чтобы исходная фигура и её образ пересекались.

***Решение.*** Пусть расстояние между любыми двумя точками фигуры не превосходит *d*. Рассмотрим сдвиги нашей фигуры на всевозможные целочисленные векторы. Нарисуем на плоскости два квадрата с общим центром и сторонами, параллельными координатным осям – один со стороной *l*, а другой – со стороной *l +* 2*d* (значение *l* мы определим позже). Большой квадрат «окаймляет» малый, ширина «каймы» равна *d*. Поэтому любой из рассматриваемых образов фигуры, пересекающий малый квадрат, целиком лежит внутри большого. Левый нижний угол маленького квадрата расположим так, чтобы он принадлежал рассматриваемой фигуре.

Оценим площадь фигур, пересекающих малый квадрат. Таких фигур не меньше *l*2, т.к. сдвиги на векторы вида (*m, n*) (0 < *m* < *l,* 0 < *n* < *l*) переводят левый нижний угол квадрата в точку внутри квадрата, а таких сдвигов всего имеется ([*l*] + 1)2 > *l*2. Если предположить, что образы фигуры не пересекаются, то их суммарная площадь должна не превосходить площади большого квадрата. Получаем неравенство:
*Sl*2 < (*l +* 2*d*)2
или
(*S –* 1)*l*2 – 4*dl* – 4*d*2 < 0.
В левой части последнего неравенства стоит квадратный трёхчлен относительно *l* со старшим коэффициентом большим нуля. При достаточно больших *l* он принимает положительные значения (его график – парабола с ветвями вверх). Значит, можно подобрать такое *l*, при котором последнее неравенство не будет выполняться. Поэтому предположение, что образы нашей фигуры не пересекаются приводит к противоречию.

Так как два образа рассматриваемой фигуры при сдвигах на целочисленные векторы пересекаются, то при сдвиге исходной фигуры на разность этих векторов получим фигуру, пересекающую исходную.

Задачи

1. Путешественник отправился из своего родного города *А* в самый удалённый от него город страны *В*; затем из *В* - в самый удалённый от него город *С* и т.д. Докажите, что если *С* не совпадает с *А*, то путешественник никогда не вернётся домой. (Расстояния между городами страны различны).
2. Назовём автобусный билет (с шестизначным номером) счастливым если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми?
3. В оду из голов 100-голового дракона пришла мысль расположить свои головы так, чтобы каждая находилась между двумя другими. Сможет ли он это сделать? (Головы – это точки на плоскости).
4. На столе лежат одинаковые монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более трёх других.
5. На столе лежат монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более пяти других.
6. На столе лежат монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно передвинуть по столу к его краю, не сдвинув других монет.
7. На полях шахматной доски расставлены целые числа, причём никакое число не встречается дважды. Докажите, что есть пара соседних (имеющих общую сторону) клеток, числа в которых отличаются меньше, чем на 5.
8. На окружности стоят 30 чисел, каждое из которых равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Что это за числа и как они стоят на окружности?
9. На прямой расположена колония из конечного числа бактерий. В моменты 1, 2, 3, … некоторые из бактерий могут погибать; новых бактерий не возникает ни в один момент. Погибают те и только те бактерии, от которых ни слева на расстоянии 1, ни справа на расстоянии  нет бактерий. Существует ли колония бактерий, которая будет жить вечно?
10. В течение дня в библиотеке побывало 100 читателей. Оказалось, что в тот день из любых трёх читателей двое в библиотеке встретились. Докажите, что сотрудник библиотеки мог сделать важное сообщение в такие два момента времени, чтобы все 100 человек его услышали. (Каждый читатель побывал в библиотеке только один раз)
11. На плоскости отмечено несколько прямых. Известно, что через точку пересечения любых двух отмеченных прямых, проходит по крайней мере ещё одна. Докажите, что все отмеченные прямые проходят через одну точку.
12. Дан параллелограмм с вершинами в целых точках такой, что внутри или на границе больше целых точек нет. Докажите, что его площадь равна единице.
13. (лемма Минковского). Докажите, что центрально-симметричная относительно начала координат выпуклая фигура площади больше 4 содержит ещё хотя бы одну целую точку.

*Указание*. Произведите гомотетию с коэффициентом ½ и воспользуйтесь результатами примера 7.

В следующих задачах применяется *метод малых шевелений*, который родственен правилу крайнего.

1. Прямая имеет с замкнутой ломаной 1995 общих точек. Докажите, что некоторая прямая, не параллельная ни одному звену ломаной, имеет с ней более 1995 общих точек.
2. На окружности проведено 100 хорд, из которых любые две пересекаются. Всегда ли можно провести ещё одну хорду так, чтобы она пересекала их все?

### Идея №11

### Причёсывание задач (или «можно считать, что…»)

Известно, что человек некультурный ест как придётся, а культурный сначала приготовит пищу. Так и некультурный математик решает задачу как придётся, а культурный «приготовит» задачу, т.е. преобразует её к удобному для решения виду.

Приготовление задачи может состоять в переформулировке условия на более удобном языке (например, на языке графов), отщеплении простых случаев, сведении общего случая к частному.

Такие преобразования сопровождаются фразами «в силу симметрии», «явно не хуже», «для определённости», «не нарушая общности», «можно считать, что…».

**Пример 1.** Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше 2/5. Докажите, что во всём классе мальчиков не больше 4/7.

***Решение****.* «Лобовое» решение состоит в рассмотрении количеств мальчиков, ходивших только в первый поход, ходивших только во второй поход, ходивших в оба похода, то же для девочек, составлении и решении системы уравнений и неравенств. Этого делать не хочется, поэтому будем избавляться от лишних параметров, сводя задачу к её частному случаю. Мы проделаем это в несколько шагов. После каждого шага упрощения становится очевидным следующий шаг.

Будем увеличивать число мальчиков в классе, не изменяя числа девочек и не нарушая условия задачи.

*1 шаг.* «Впишем» всех девочек в число участников обоих походов. От этого доля мальчиков в классе не изменится, а в походах – уменьшится. Итак, можно считать, что все девочки ходили в оба похода.

*2 шаг.* Если мальчик ходил в первый поход, то освободим его от посещения второго. Доля мальчиков в походе уменьшится. Итак, можно считать, что каждый мальчик ходил только в один поход.

*3 шаг.* Если в одном походе было меньше мальчиков, чем в другом, то добавим в класс мальчиков. Доля мальчиков в походах останется не больше 2/5, а доля мальчиков в классе увеличится. Можно считать, что мальчиков было в походах поровну.

*4 шаг.* Задача стала тривиальной: в обоих походах были все девочки и ровно половина мальчиков. Обозначим число девочек 3х, тогда мальчиков в походах было не больше 2х, а во всём классе – не больше 4х. Максимальное число мальчиков в классе 4х, а это равно 4/7 класса.

**Пример 2.** В 9 ячейках записаны числа: в первой – единица, а в остальных – нули. За одну операцию можно выбрать две ячейки и заменить каждое число в них полусуммой этих чисел. Какое наименьшее число можно получить в первой ячейке?

***Решение****.* Нетрудно получить число 1/28, усредняя число в первой ячейке со всеми остальными по очереди. Труднее доказать, что меньше получить нельзя.

Изменим условие задачи. Пусть после каждой операции все ненулевые числа становятся равными наименьшему из них. Эта новая операция даёт результат в каждой ячейке не больше, чем исходная операция.

Теперь всё ясно: новая операция либо ничего не меняет, либо уничтожает один нуль и уменьшает все числа в два раза. Поскольку новая операция не позволяет получить число меньшее 1/28, то исходная операция – тем более.

Задачи

1. В кладовой лежат 300 сапог: 100 хромовых, 100 кирзовых и 100 яловых, причём левых и правых поровну – по 150. Докажите, что из имеющихся сапог можно составить по крайней мере 50 пар.
2. На плоскости нарисовано несколько точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Отрезки могут выходить из одной точки, но не должны пересекаться. Кто не может сделать ход, проигрывает. Докажите, что при любых ходах игроков победителем будет один и тот же, а кто именно – определяется лишь начальной позицией.
3. Дан выпуклый многоугольник площади 9. Его пересекают десять параллельных прямых на расстоянии 1 друг от друга. Докажите, что сумма длин отрезков, высеченных многоугольником на этих прямых, не более десяти.
4. В *N*-мерном кубе покрашено более половины вершин. Ребро называется покрашенным, если покрашены обе ограничивающие его вершины. Докажите, что покрашено не менее *N* ребёр.

### Идея №12

### Соответствие

Проще всего понять идею на примерах (см. также тему «Игры»).

**Пример 1.** Найдите сумму чисел 1 + 2 + 3 +…+ 100.

***Решение*** *(его придумал маленький Гаусс).* Напишем ту же сумму в обратном порядке и сложим числа по столбцам:
 *х =* 1 + 2 + 3 + … + 100
 *х* = 100 + 99 + 98 + … + 1
2*х* = 101 + 101 + 101 + … + 101 = 10100

***Ответ:*** 5050.

**Пример 2.** Придворный астролог царя Гороха называет время суток хорошим, если на часах с центральной секундной стрелкой при мгновенном обходе циферблата по ходу часов минутная стрелка встречается после часовой и перед секундной. Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого?

***Решение****.* Основная идея: если стрелки показывают хорошее время, то их зеркальное отражение показывает плохое, и наоборот.

В полночь стрелки совпадают. Если пустить часы назад, то стрелки будут показывать какое-то вчерашнее время, а их расположение будет зеркально симметричным расположению стрелок на обычных часах.

Итак, каждому хорошему моменту сегодня соответствует плохой момент вчера. Причём интервалу хорошего времени соответствует равный интервал плохого. Значит, хорошего времени сегодня столько же, сколько было плохого вчера. Поэтому хорошего и плохого времени в сутках поровну.

***Ответ:*** Поровну.

**Пример 3.** В выпуклом *n*-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной внутренней точке. Сколько точек пересечения у этих диагоналей (не вершин)?

***Решение***. Каждой внутренней точке пересечения диагоналей соответствует четвёрка вершин – концов соответствующих диагоналей.

Имеется и обратное соответствие: каждой четвёрке вершин соответствует точка пересечения диагоналей образованного ими четырёхугольника. Поэтому число точек пересечения диагоналей равно количеству четвёрок вершин, т.е. числу сочетаний из *n* по 4.

***Ответ:*** С4n.

Объект может стать более естественным, если у него найдётся пара. Например, вместе с иррациональностью *x + y* рассматривают сопряжённую иррациональность *x - y*.

**Пример 4.** Докажите, что в числе  первые 999 цифр справа после запятой – нули.

***Решение****.* Основная идея: добавим сопряжённую иррациональность  и заметим, что сумма  +  есть число целое, а член  достаточно мал.

Задачи

1. Докажите, что дроби 1000/1993 и 993/1993 имеют одинаковую длину периодов.
2. Докажите, что сумма номеров «счастливых» билетов делится на 13. Билет называют «счастливым», если сумма первых трёх цифр его номера равна сумме трёх последних цифр.
3. По кругу расставлены 8 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Первый отрезок проводится произвольно, а каждый следующий отрезок начинается из конца предыдущего. Проигрывает тот, кто не может провести новый отрезок (дважды проводить отрезок нельзя). Предположим, что игроки не делают ошибок. Кто из них победит: первый или второй?
4. На окружности даны 1987 точек, одна из них отмечена. Рассмотрим всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех, которые содержат отмеченную точку, или тех, которые её не содержат?
5. Докажите, что число  представимо в виде , причём .
6. Существуют ли такие рациональные ai и bi, что ?
7. Докажите, что число  представимо в виде , где .
8. Двое бросают монетку: один бросил её 10 раз, другой – 11. Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом большее число раз, чем у первого?

### Идея №13

### Графы

Во многих ситуациях удобно изображать объекты точками, а связи между ними – линиями или стрелками. Такой способ представления называется *графом*. Например, схема метро – это граф. Точки называют *вершинами* графа, а линии – *рёбрами*.

Вершину называют *чётной*, если из неё выходит чётное число ребёр и *нечётной* в противном случае. Граф называют *чётным*, если у него все вершины чётные, *связным* – если между любыми вершинами существует путь, состоящий из рёбер графа, *ориентированным* – если на каждом ребре указано направление, *плоским* – если он нарисован на плоскости и его рёбра не пересекаются (во внутренних точках).

При решении многих олимпиадных задач используются следующие утверждения, относящиеся к обходу рёбер графа:

1) если в графе больше двух нечётных вершин, то его правильный обход (т.е. обход, при котором каждое ребро проходится ровно один раз) невозможен;

2) для всякого чётного связного графа существует правильный обход, который можно начать с любой вершины и который обязательно кончается в той же вершине, с которой начался;

3) если в связном графе ровно две нечётные вершины, то существует правильный обход, причём в одной из них он начинается, а в другой – кончается;

4) в любом графе количество нечётных вершин чётно.

**Пример 1.** В углах шахматной доски 3 х 3 стоят 4 коня: 2 белых (в соседних углах) и 2 чёрных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам) поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?

***Решение****.* Отметим центры клеток доски и соединим отрезками пары отмеченных точек, если из одной в другую можно пройти ходом коня. Мы получим граф, содержащий «цикл» из восьми точек и одну изолированную точку (рис.). Перемещение коней по доске соответствует движению по рёбрам этого цикла. Ясно, что при движении по циклу нельзя изменить порядок следования коней.

******

**Пример 2.** Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 так, чтобы число, составленное из двух соседних цифр, делилось либо на 7, либо на 13.

***Решение****.* Напишем цифры на листе. Соединим стрелками те цифры, которые могут следовать друг за другом (рис.). Теперь ясно, что первой идёт 7, затем 8 и 4. Поскольку 8 уже использована, то стрелки, идущие в неё, надо убрать. После 4 идёт 9, поскольку к девятке другого пути нет. Дальше идёт 1 и так далее.



***Ответ:*** 784913526.

**Пример 3.** В стране Радонежии некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 1985 авиалиний, из города Дальнего одна, а из остальных городов – по 20 линий. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего.

***Решение***. Рассмотрим множество городов, до которых можно добраться из столицы. Это граф: его вершины – города, рёбра – авиалинии, их соединяющие. Из каждой вершины графа выходит столько рёбер, сколько всего авиалиний выходит из соответствующего города. Граф содержит нечётную вершину – столицу. Поскольку число нечётных вершин в графе чётно, в нём есть ещё одна нечётная вершина. Этой вершиной может быть только город Дальний.

Задачи

1. Расположите на плоскости 6 точек и соедините их непересекающимися линиями так, чтобы из каждой точки выходили четыре линии.
2. В трёх вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается передвигать их по диагонали в любую свободную вершину. Можно ли таким образом добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на своё место, а две другие поменялись местами?
3. В марсианском метро 100 станций. От любой станции до любой другой можно проехать. Забастовочный комитет хочет закрыть проезд через одну из станций так, чтобы между всеми остальными станциями был возможен проезд. Докажите, что такая станция найдётся.
4. Докажите, что в плоском графе найдётся вершина, из которой выходит не более 5 рёбер.
*Следствия:*а) Вершины плоского графа можно раскрасить в 6 цветов так, чтобы вершины, соединённые ребром, имели разный цвет.
б) Конечная плоская карта допускает раскраску в 6 цветов такую, что соседние страны будут окрашены в разные цвета.
5. Клетчатая плоскость раскрашена десятью красками так, что соседние (т.е. имеющие общую сторону) клетки покрашены в разные цвета, причём все десять красок использованы. Каково минимальное возможное число пар соседних красок? (Две краски называются *соседними*, если ими покрашены какие-то две соседние клетки).
6. В тридевятом царстве каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что существует город, из которого в любой другой можно проехать не более чем по двум дорогам.
7. В городе на каждом перекрёстке сходится чётное число улиц. Известно, что с любой улицы города можно проехать на любую другую. Докажите, что все улицы города можно объехать, побывав на каждой по одному разу.
8. Последовательность из 36 нулей и единиц начинается с пяти нулей. Среди пятёрок подряд стоящих цифр встречаются все 32 возможных комбинации. Найдите пять последних цифр последовательности.
9. Дан правильный 45-и угольник. Можно ли так расставить в его вершинах цифры от 0 до 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами.
*Указание.* Рассмотреть полный граф, вершины которого суть цифры цифры от 0 до 9. Задача сводится к его обходу.
10. Докажите, что можно расположить по кругу символы 0 и 1 так, чтобы любой возможный набор из *n* символов, идущих подряд, встретился.
*Указание.* Рассмотреть граф, вершины которого суть слова длины *n* – 1. Две вершины *u* и *v* соединяются стрелкой, если существует слово длины *n*, у которого *u* является началом, а *v* – концом.

### Идея №14

### Покрытия и упаковки

Если объединение нескольких фигур содержит данную фигуру **Ф**, то говорят, что эти фигуры образуют покрытие фигуры **Ф**. При этом покрывающие фигуры могут пересекаться.

*Упаковка* – это размещение нескольких непересекающихся ­фигур внутри данной фигуры.

**Пример 1.** Можно ли покрыть правильный треугольник двумя правильными треугольниками меньшего размера?

***Решение****.* Каждый из меньших треугольников может покрыть только одну вершину большего, но вершин три, а треугольников только два.

**Пример 2.** На поле 10 х 10 для игры в «морской бой» нужно расставить один корабль 1 х 4, два корабля 1 х 3, три корабля 1 х 2 и четыре корабля 1 х 1. Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин), но могут прилегать к границам квадрата. Докажите, что если расставлять их в указанном порядке (начиная с больших), то каждому кораблю всегда найдётся место (как бы их ни ставили на любое свободное место).

***Решение****.* Корабль 1 х 4 поставить можно. Докажем, что очередной корабль 1 х 3 поместится. Для этого нарисуем 8 вспомогательных кораблей 1 х 3, параллельных друг другу, с интервалом две клетки. Поставленные корабли могут задеть (пересечь или коснуться) не больше двух отмеченных, поэтому останется незадетый отмеченный корабль, на место которого можно поставить очередной корабль 1 х 3.

Пусть уже расставлены корабли 1 х 4, два 1 х 3 и меньше трёх 1 х 2. Докажем, что ещё один корабль 1 х 2 поместится. Для этого отметим 12 вспомогательных кораблей 1 х 2 параллельных друг другу с интервалом две клетки. Каждый поставленный корабль может задеть не больше двух отмеченных, поэтому останется незадетый отмеченный корабль.

Аналогично поместится очередной одноклеточный корабль. Отметим 16 вспомогательных кораблей 1 х 1 с интервалом две клетки. Поставленные корабли задевают не больше 15 отмеченных.

**Пример 3.** Внутри круглого блина радиуса *R* запекли монету радиуса *r*. Каким наименьшим числом прямых разрезов можно наверняка задеть монету?

***Решение****.* Если разрезы проводить параллельно, то монету можно задеть за *R*/2*r* разрезов, если число *R*/2*r* – целое, и за [*R*/2*r*] + 1 разрезов, если *R*/2*r* – нецелое. Трудность состоит в доказательстве того, что меньшим числом разрезов обойтись нельзя.

Рассмотрим множество возможных положений центра монеты. Каждому прямолинейному разрезу соответствует полоса ширины 2*r*, отвечающая множеству возможных центров монеты, задетой этим разрезом. Таким образом, задача переформулируется следующим образом: найти минимальное число полос шириной 2*r*, покрывающих круг радиуса *R*.

Воспользуемся следующим замечательным фактом: если сферу пересечь двумя параллельными плоскостями, то площадь сферы между ними зависит только от расстояния между плоскостями и не зависит от их положения.

Опишем вокруг блина сферу. Через края каждой полосы проведём две перпендикулярные к ней плоскости. Они высекут на сфере кольца одинаковой площади. Осталось покрыть сферу наименьшим числом колец известной площади.

Задачи

1. Квадратный каток надо осветить четырьмя прожекторами, висящими на одной высоте. Каков наименьший радиус освещённых кругов?
2. На плоскости горит лампочка. Можно ли расположить три круга так, чтобы освещённая область была ограниченной?
3. Коридор полностью покрыт несколькими ковровыми дорожками. Докажите, что можно убрать несколько дорожек так, чтобы
а) коридор был полностью покрыт, а общая длина оставшихся дорожек была не больше удвоенной длины коридора;
б) оставшиеся дорожки не перекрывались и их суммарная длина была не меньше половины длины коридора.
4. Пол в прямоугольной комнате 6 х 3 м2 покрыт квадратными коврами разных размеров, края которых параллельны стенам. Докажите, что можно убрать несколько ковров так, чтобы оставшиеся ковры покрывали более 2 м2.
5. На столе лежат 15 журналов, полностью покрывая его. Докажите, что можно убрать 7 журналов так, чтобы оставшиеся покрывали не менее 8/15 площади стола.
6. Круглый стол покрыт круглыми салфетками разных размеров. Докажите, что можно выбрать несколько салфеток, которые не пересекаются и закрывают не менее 1/9 площади стола.
7. Среди четырёх выпуклых фигур любые три имеют общую точку. Докажите, что все фигуры имеют общую точку.
8. Плоскость покрыта конечным числом полуплоскостей. Докажите, что из них можно выбрать три (или две) полуплоскости, которые покрывают всю плоскость.
9. Прожектор освещает прямой угол. Четыре прожектора поместили в произвольных точках плоскости. Докажите, что прожекторы можно повернуть так, что они осветят всю плоскость.
10. На шахматной доске расставляют королей так, чтобы они били все клетки. Каково наименьшее число королей?
11. Из листа клетчатой бумаги 29 х 29 клеток вырезали 99 квадратов 2 х 2. Докажите, что из остатка можно вырезать ещё один такой квадрат.
12. Пусть *А* – наибольшее число попарно непересекающихся кругов диаметра 1, центры которых лежат внутри многоугольника *М*, *В* – наименьшее число кругов диаметра 2, которыми можно покрыть многоугольник. Что больше: *А* или *В*?
13. На круглом столе радиуса R лежат без наложений *n* круглых монет радиуса *r*. Докажите, что
 .
14. Пусть *S* – площадь выпуклого многоугольника, *P* – его периметр, *R* – радиус максимального вписанного круга. Докажите, что
.
15. Окружность покрыта бесконечным число открытых дуг. Докажите, что можно выбрать несколько дуг, которые покрывают окружность и имеют суммарную длину не более 720о?
16. На листе бумаги расположено несколько прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат. Каждые два прямоугольника имеют общие точки. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем прямоугольникам.