**Тема: Застосування визначеного інтеграла у фізиці та економіці.**

1. Використання інтеграла в фізиці.
2. Економічний зміст визначеного інтеграла.
3. Знаходження капіталу за відомими інвестиціями.
4. **Використання інтеграла в фізиці.**

Інтеграл широко використовується у фізиці. Розглянемо табли­цю **11.**

#

# Коментарі до таблиці

1. Припустимо, що точка рухається по прямій (по осі ОХ) і нам відома швидкість цієї точки. Як знайти переміщення точки за проміжок часу [*t1; t2*]?

Розглянемо відрізок часу [*t; t +* Δ*t*] і будемо вважати швид­кість на цьому відрізку постійною. Тоді одержимо Δ*s(t)* = *v(t)*·Δ*t*, звідси



2. Нехай тіло рухається по осі *ОХ,* в кожній точці якої прикла­дена деяка сила *F* = *F(x).* Обчислимо роботу, яку треба вико­нати при переміщенні із точки *х1* в точку *x2*. На маленькому відрізку шляху від точки *x* до точки *x* + Δ*x* можна вважати силу постійною, яка дорівнює *F(x).* Тоді ΔА(*x*) = *F(x)*Δ*x.* Звідси одержуємо, що всю роботу на відрізку [*x1; x2*] можна записати у вигляді інтеграла:



3. Розглянемо задачу обчислення маси неоднорідного стержня, якщо нам відомо, як змінюється його лінійна густина *р(х).* Візьмемо відрізок [*x; x+*Δ*x*]. Вважаючи, що на цьому від­різку густина постійна, матимемо Δ*m*(*x*) = р(*x*)Δ*x*; звідси



4. Поставимо задачу обчислити заряд *q,* що переноситься за про­міжок часу [*t1; t2*] через переріз провідника. Нехай задано закон зміни струму *І* = *I(t)* в залежності від часу. Тоді на малому проміжку часу [*t*; *t +* Δ*t*] можна вважати силу стру­му постійною, яка дорівнює *I(t),* a Δ*q(x) = I(t) ·* Δ*t* і, отже



***Приклад 1.*** Тіло рухається прямолінійно з швидкістю м/с. Знайти шлях, пройдений тілом за перші 3 с.

Розв’язання. За формулою (2) дістанемо



***Приклад 2.*** Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v=6t^{2}+8t-1.$ Знайдіть закон руху, якщо за час *t* =1с воно пройшло шлях s = 3м.

5. За законом Паскаля сила тиску рідини на пластинку, якщо пластинка буде в горизонтальному положенні, обчислюється за формулою:

 (1)

де густина рідини, g – прискорення сили тяжіння, h- глибина занурення, S - площа пластинки.

Нехай пластинку у вигляді криволінійної трапеції занурено вертикально в рідину з густиною  так, що її бічні сторони паралельні поверхні рідини і лежать нижче від її рівня відповідно на відстані *a* i *b*.

Тоді за формулою (1) тиск рідини на пластинку не можна обчислити, бо в цьому разі тиск рідини на одиницю площі пластинки змінюється із зміною глибини занурення, тобто залежить від відстані пластинки до поверхні рідини.

Тому силу тиску рідини на пластинку обчислюють за формулою

.

***Приклад 3.*** Акваріум має форму прямокутного паралелепіпеда. Знайти силу тиску води (густина води 1000 кг/м3), яка наповнює акваріум, на одну з його вертикальних стінок, розміри якої 0,4 х 0,7 м.

Розв’язання. Візьмемо систему координат так, щоб осі *Оу* і *Ох* відповідно містила верхню основу і бічну сторону вертикальної стіни акваріума. Щоб знайти силу тиску, скористаємось формулою (2).

Стінка має форму прямокутника, тому . Оскільки межі інтегрування *a=0* i *b=0,4*, то дістанемо

.

Враховуючи, що м/с2 , маємо 

***Приклад 4***. Сила пружності пружини, розтягнутої на 0,05м, дорівнює 3Н. Яку роботу треба виконати, щоб розтягти пружину на ці 0,05м?

Розв’язання. За законом Гука сила F, яка розтягує або стискає пружину, пропорційна цьому розтягу або стиску, тобто , де *х* – величина розтягу або стиску, *k* - коефіцієнт пропорційності. З умови випливає, що , тобто *k=60*, отже, *F=60х*.

Використовуючи формулу (3), дістаємо

(Дж).

1. **Економічний зміст визначеного інтеграла.**

Якщо  - продуктивність праці в момент часу , то

- обсяг продукції, що випускається за проміжок часу ;

- обсяг продукції, що випускається за проміжок часу .

***Приклад 5.*** Знайти обсяг продукції, виробленої за чотири роки, якщо продуктивність праці характеризується формулою .

Розв’язання. Скористуємося формулою (6.38). Обсяг виробленої продукції дорівнює:

.

Використаємо метод інтегрування частинами:

 3. **Знаходження капіталу за відомими інвестиціями.**

Розглянемо задачу знаходження капіталу (основних фондів) за відомими частими інвестиціями. Чисті інвестиції (капіталовкладення)- це загальні інвестиції, які були зроблені за певний проміжок часу, за винятком інвестицій на відшкодування основних фондів (капіталу), які виходять з ладу. Таким чином, за одиницю часу капітал збільшується на суму чистих інвестицій.

Якщо капітал розглядати як функцію часу , а чисті інвестиції, відповідно, як , то викладене вище можна записати у вигляді:

.

Часто вимагається знайти приріст капіталу за період з моменту часу  до , тобто величину . Враховуючи, що  - первісна для функції , маємо:

.

***Приклад 6.*** Чисті інвестиції задано функцією .

Визначити:

а) приріст капіталу за три роки;

б) термін часу (у роках), після якого приріст капіталу складає 50000.

Розв’язок. а) Скористаємося формулою для обчислення , поклавши  поклавши =0; =3.

.

б) Позначимо шукану тривалість часу через Т, тоді

.

Підставляємо  і .







 

1. **Розв’язування задач**

Для кращого обслуговування заїзду гонок серії "Формула-1" майстри визначили найкращий закон зміни швидкості руху автомобіля прямою трасою: v(t) = 2·(t+2)5/2. Який шлях проїде пілот цієї гонки за 7 с від початку руху? Який шлях він проїде за сьому секунду?

Розв’язання:



Відповідь 1243 м; 422 м.

# Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити шлях, пройдений тілом при рівномірному русі за інтервал часу від  до ;

а)

б)

2. Сила в 1Н стискає пружину на 1 см. Обчислити роботу при стисканні пружини на 10 см.

3. При розтягуванні пружини на 0, 02 м потрібно прикласти силу в 40Н. Обчислити роботу при стисканні пружини на 0,05м.

4. Знайти середнє значення витрат , виражених в грошових одиницях, якщо обсяг продукції х змінюється від 0 до 3 од. Вказати обсяг продукції, за якого витрати приймають середнє значення.