**Тема: Логарифми. Види логарифмів та їх властивості.**  **Логарифмічна функція, її графік.**

1. **Мотивація. Актуализація знань**

Слово логарифм походить від грецького λόyoφ (число) і αρίνμοφ (відношення) і перекладається, отже, як відношення чисел.

Винахідник логарифмів, укладач першої таблиці логарифмів був англійський математик Непер Джон.

Його математичні праці спрямовані на спрощення та впорядкування арифметики, алгебри і тригонометрії. 1614 року Непер видав працю "Опис дивовижної таблиці логарифмів", в якій не тільки дав визначення логарифма, описав його властивості, але й запропонував таблиці логарифмів синусів, косинусів і тангенсів. Також Непер відкрив логарифмічну криву. Пізніше їм була винайдена логарифмічна лінійка, якою користувалися до 70-х років ХХ ст.

Застосування логарифма (Банківські розрахунки, Географія, Розрахунки у виробництві, Біологія, Хімія, Фізика, Астрономія, Психологія, Соціологія, Музика).

Використання логарифмів дозволяє замінити множення на значно більш просте додавання, ділення - на віднімання, а зведення до степеня і добування кореня замінюються відповідно на множення і ділення на показник степеня числа.

1. **Поняття логарифма числа**

Рівняння *ах = b,* де *a >* 0, *а ≠* 1, *b >* 0 (рис. 162) має єдиний корінь. Цей корінь називається логарифмом числа *b* за основою *a* і позначається *logab.*

*Наприклад:* коренем рівняння 2*х* = 8 є число 3, тобто *log*2 8 *= –* 3.

!

*Логарифмом* додатного числа *b* за основою *а,* де *а >* 0, *а ≠* 1, називається *показник степеня,* до якого треба піднести число *а,* щоб одержати число *b.*

*Наприклад:* *log*28 = 3, оскільки 23 = 8;

*log*2  = – 2, оскільки 2-2 = ;

*log*7l = 0, оскільки 70 = 1.

**Десятковими** логарифмами називаються логарифми за осно­вою 10, позначаються *lg*.

*Наприклад,* *lg*100 = 2, *lg*0,0001 = - 4.

**Натуральними** логарифмами називаються логарифми за ос­новою *е* (число *е —* ірраціональне, *е* == 2,718281828459045...), позначаються *ln*.

*Наприклад:* *ln* *е* = 1, *ln* *е*2 *=* 2, *ln*  = -1.

Означення логарифма можна коротко записати так: *.*

Ця рівність справедлива при *b > 0, a > 0, a ≠* 1 називається **основною логарифмічною тотожністю.**

*Наприклад:* , .

1. **Основні властивості логарифмів.**

При виконанні перетворень виразів, які містять логарифми, при обчисленнях і при розв'язуванні рівнянь, нерівностей часто використовуються властивості логарифмів.

Для будь-яких *а >* 0, *а ≠* 1 і будь-яких додатних *х* і *у* виконуються рівності:

|  |
| --- |
| l. *logа* l = 0;  2. *logаa* *=* 1;  3. *logа* *xy* = *logа x* + *logа* *y*;  4. *logа* = *logа* *x –* *logа y;*  5. *logа* *х р* *= p logа x* (*р*  *R*);  6.  *=  loga x (p  R);*  7. *loga x* =  (*b* > 0, *b* ≠ 1). |

**Приклади**

1. Розглянемо приклади використання формул 3-7. Обчислимо:

1) *log*6 18 + *log*6 2 = *log*6(18 – 2) *=* *log*6 36 = 2;

2) *log*12 48 – *log*12 4 = *log*6  = *log*12 12 = 1;

3) *log*6 *= log*6 *= log*6 3 *= ·* 1 *= *;

4) *log*125 5 = *log*125 5 = *log*5 5 = ** · 1 = **;

5)  = *log*4 16 = *log*4 42 = 2 log4 4 = 2 · 1 = 2.

а) Обчисліть: ; *.*

# **Розв'язання**

=====·=.

====·= 5.

б) Обчисліть .

## Розв'язання

==== 52 · 3-2 =

= 25 ·  =  = .

1. **Засвоєння властивостей логарифмічної функції та її графіка.**

!

Функція виду *у* = *loga x*, де *а* — задане число, *а > 0, а ≠* 1 нази­вається логарифмічною функцією.

**Логарифмічна функція має такі властивості**:

1. Область визначення функції — множина всіх додатних чисел. Ця властивість випливає із означення логарифма, оскільки вираз *loga* *х* має смисл тільки при *х* > 0.
2. Область значень логарифмічної функції — множина *R* усіх дійсних чисел. Ця властивість випливає з того, що для будь-якого дійсного числа *b* є таке додатне число *х,* що *loga x* = *b,* тобто рівняння *loga x* = *b* має єдиний корінь. Такий корінь існує і дорівнює *х* = *аb,* оскільки *loga аb* = *b.*
3. Логарифмічна функція на всій області визначення зростає (при *а >* 1) або спадає (при 0 < *а <* 1). Нехай *а >* 1. Доведемо, що якщо *x*2 > *х*1 *>* 0,то

*loga х*2 *> loga x*1. Користуючись основною логарифмічною то­тожністю, умовою *x*2 *>* *х*1, можна записати . З останньої нерівності за властивістю степеня з основою *а >* 1 маємо, що *loga х*2 *> loga x*1.

Нехай 0 < *а <* 1. Доведемо, що якщо *x*2 > *х*1 *>* 0, то *loga х*2 *< loga x*1. Записавши умову *x*2 > *х*1 у вигляді  одержуємо *loga х*2 *< loga x*1, оскільки 0 < *а <* 1.

1. Якщо *а* > 1, то функція *у* = *loga x* приймає додатні значення при *х* > 1, від'ємні — при 0 < *х* < 1. Якщо 0 < *а <* 1, то функція у = *loga x* приймає додатні значен­ня при 0 < *х* < 1, від'ємні — при *х* > 1

Ця властивість випливає з того, що функція *у* = *loga x* при­ймає значення, рівне нулю, при *х* = 1 і є зростаючою на про­міжку *х* > 0, якщо *а >* 1, і спадною, якщо 0 < *а <* 1. Спира­ючись на доведені властивості, неважко побудувати графік функції *у* = *loga x* (рис.1).

****Графіки показникової функції і логарифмічної функції, які мають однакові основи, симетричні відносно прямої *у* = *х* (рис.2), бо функції *у* = 0*х* і *у* = *loga x* є взаємнооберненими.

**Рефлексія**

Повторення властивостей логарифмічної функції і заповнення опорного конспекта

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Логарифмічна функція | | | | |
|  | 1. *D(y)* = ....  2. *Е(у) = ....* | | |  |
| *a* > 1  3. Якщо *х*1 *< x*2 то  …………………..  4. *loga* *x >* 0*,* якщо .....  *loga х* = 0, якщо .....  *loga* *x <* 0*,* якщо ..... | |  | 0 **<** *а* ***<*** 1  3. Якщо *х*1 *< x*2 то  …………………..  4. *loga* *x >* 0*,* якщо .....  *loga х* = 0, якщо .....  *loga* *x <* 0*,* якщо ..... | |

**Домашнє завдання.**

-вивчити матеріал лекції;

-розв’язати № 30, 27, 26, 21 (Г.Н.Литвиненко. Збірник завдань для атестації з математики учнів 10-11 кл.)