**Тема 3: Методи інтегрування: заміною змінної, по частинам**

**План**

1. Безпосереднє інтегрування.

2. Метод заміни змінної

3. Інтегрування по частинах.

**1. Безпосереднє інтегрування.**

Безпосереднім інтегруванням будемо називати інтегрування за допомогою властивостей невизначеного інтеграла, тотожних перетворень підінтегральної функції і таблиці основних інтегралів.

Приклад 1.

.

1. **Метод заміни змінної**

Спосіб полягає в наступному: замінюють новою змінною таку частину підінтегральної функції, при диференціюванні якої виходить решта підінтегрального виразу (не рахуючи постійного множника). В основі **методу підстановки (або методу заміни змінної)** обчислення невизначених інтегралів лежить таке твердження, яке є наслідком правила диференціювання складеної функції:

Нехай дано функції , і нехай існує складена функція . Якщо функція  має первісну , а функція  диференційована, то функція  є первісною для функції , і тому



***Приклад 1.*** ;

Нехай *sinx=t*, тоді *dt=dsinx=(sinx)|dx=cosxdx,*

 =

***Приклад 2.*** 

Нехай *t=1+x3*, тоді *dt=d(1+x3)=(1+x3)|dx=3x2dx; x2dx=;*

x2dx=+C.

***Приклад 3*.**=

 *=sinx-+C.* Тут  *sinx=t,* тоді *dt=dsinx=(sinx)|dx=cosxdx.*

***Приклад 4*.** нехай *1-x2=t*, тоді *dt=d(1-x2)=(1-x2)|dx=-2xdx; xdx=-*

=-

***Приклад 5.***

.

Припустимо, що , тоді *dt = -* $\frac{1}{x^{2}}$*dx* . Отже,

.

**Завдання для самостійної роботи:**

***Завдання 1.*** Знайти невизначені інтеграли способом підстановки:

1)  2) 3) 

4)  5)  6) 

1. **Інтегрування по частинах.**

За правилом диференціювання добутку маємо

.

Тому



Якщо похідні (або, що те саме, диференціали) двох функцій рівні, то їх невизначені інтеграли збігаються. Тому



Використовуючи властивість невизначених інтегралів:

,

дістанемо формулу

 (1)

Цю формулу називають формулою інтегрування частинами.

***Приклад 6.*** Обчислити інтеграл 

Розв’язання. Припустивши

, ,

тоді

 *du=dx, v=ex*

Звідси за формулою (1) матимемо



***Приклад 7***. Обчислити інтеграл .

Розв’язання. Припустимо, що 

тоді 

Тому, використовуючи формулу (1), маємо



Використовуючи формулу інтегрування частинами для відшукання інтегралів від добутку, важко дати загальне правило для визначення того, який співмножник в підінтегральному виразі слід позначити через  і який через . Водночас при визначенні інтегралів необхідно, щоб  обов’язково входило у вираз для  і цей вираз був легко інтегрованим, а також щоб інтеграл  був простішим від вихідного. Так, наприклад, для інтегралів виду , ,  за  беруть многочлен , а для інтегралів виду  за  беруть відповідно 

Якщо в інтегралах першого виду многочлен  вищий від першого степеня, то формулу інтегрування частинами треба застосовувати кілька разів.

***Приклад 8***. Знайти інтеграл 

Розв’язання. Припустимо, що  і , тоді  і  Тому



Останній інтеграл знайдемо інтегруванням частинами.

Припустимо тепер, що  і  тоді  і  Отже,



Таким чином,





Формула інтегрування частинами застосована і для знаходження інтегралів виду

 і . Для знаходження таких інтегралів формулу інтегрування частинами застосовують послідовно двічі, причому обидва рази за  беруть або показникові функцію, або тригонометричну. Після дворазового інтегрування частинами дістають лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла.

***Приклад 9***. Обчислити інтеграл 

Розв’язання. Припустимо, що  і , звідки  і . Тому

 (2)

Для знаходження останнього інтеграла використаємо ще раз формулу інтегрування частинами:

 і 

 і 

Тоді 

Підставивши цей вираз у рівність (2) дістанемо



Отже,



**Завдання для самостійної роботи:**

Обчислити інтеграли:

1. ; 2. ; 3. ; 4. .

**Домашнє завдання**

**№№ 1159, 1160**

***№1*** Знайти невизначені інтеграли способом підстановки::

1) 2) 

**№2** Знайти невизначені інтеграли способом інтегрування по частинах:

1) ; Ответ: -xcosx+sinx+C