**Тема: Обчислення довжини лінії та кривизни лінії за допомогою визначеного інтегралу.**

1. **Обчислення довжини дуги кривої**

Історично обчислення довжини дуги називалося **спрямленням** кривої. Задача спрямляння виявилася набагато складнішою, ніж [обчислення площі](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B0_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)" \o "Квадратура (математика)), і в[античні часи](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D1%96_%D1%87%D0%B0%D1%81%D0%B8) єдине успішне спрямлення було виконано для [кола](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%BE). [Декарт](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B5%D0%BD%D0%B5_%D0%94%D0%B5%D0%BA%D0%B0%D1%80%D1%82) навіть висловлював думку, що «відношення між прямим і кривим невідоме, і навіть, думаю, не може бути пізнане людьми». Першим досягненням стало спрямлення [параболи Нейла](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D0%BF%D1%96%D0%B2%D0%BA%D1%83%D0%B1%D1%96%D1%87%D0%BD%D0%B0_%D0%BF%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%B0" \o "Напівкубічна парабола) ([1657](https://uk.wikipedia.org/wiki/1657)), виконане [Ферма](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%27%D1%94%D1%80_%D0%A4%D0%B5%D1%80%D0%BC%D0%B0) і самим [Нейлом](https://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%92%D1%96%D0%BB%D1%8C%D1%8F%D0%BC_%D0%9D%D0%B5%D0%B9%D0%BB&action=edit&redlink=1). Незабаром було знайдено довжину дуги [циклоїди](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B8%D0%BA%D0%BB%D0%BE%D1%97%D0%B4%D0%B0" \o "Циклоїда) ([Рен](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D1%96%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%84%D0%B5%D1%80_%D0%A0%D0%B5%D0%BD" \o "Крістофер Рен), [Гюйгенс](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A5%D1%80%D1%96%D1%81%D1%82%D1%96%D0%B0%D0%BD_%D0%93%D1%8E%D0%B9%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%81)). [Грегорі](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B6%D0%B5%D0%B9%D0%BC%D1%81_%D0%93%D1%80%D0%B5%D0%B3%D0%BE%D1%80%D1%96" \o "Джеймс Грегорі) (ще до відкриття [математичного аналізу](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%96%D0%B7" \o "Математичний аналіз)) створив загальну теорію знаходження довжини дуги, яка негайно була використана для різних кривих.

**Означення 1.** Якщо існує границя периметра ламаної лінії, вписаної в криву http://matviyiv.yesportal.com/books/definite-integral/rozdil_02/rozd_02_3.files/image002.gif при максимальному відрізку розбиття, що прямує до 0, то криву http://matviyiv.yesportal.com/books/definite-integral/rozdil_02/rozd_02_3.files/image002.gif називають спрямлюваною, а саму границю (число *l*) називають довжиною дуги кривої http://matviyiv.yesportal.com/books/definite-integral/rozdil_02/rozd_02_3.files/image002.gif.

***Приклад 1.*** Обчислити довжину дуги лінії http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2009/871_2009.files/image976.gif на відрізку [0; 4].

► Перетворимо вираз під знаком кореня у формулі:

http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2009/871_2009.files/image978.gif

http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2009/871_2009.files/image980.gif

Довжину дуги обчислюємо за формулою (1):

http://lib.uabs.edu.ua/library/Metod/K_v_matematiki/2009/871_2009.files/image982.gif

1. **Обчислення кривизни кривої.**

Різні криві, а також одна й та ж крива в різних своїх точках мають неоднакову кривизну. Наприклад, синусоїда *y=sinx* поблизу своїх екстремумів викривлена більше, ніж поблизу точок перетину з віссю абсцис. Коло в усіх своїх точках викривлене однаково, але коло більшого радіуса викривлене менше, ніж коло меншого радіуса. Пряма лінія не викривлена зовсім.

**Означення 2.** *Кривизну кривої* можна визначити як відношення кута повороту дотичної  Δφ до довжини дуги Δs=MM1. Таке відношення  называется *средней кривизной дуги кривой*. Коли точка M1 наближається до точки M, ми отримуємо кривизну кривої в точці M:

k= =

Зрозуміло, що кривизна k в загальному випадку може бути як додатною, так і відємною, в залежності від напрямку обертання дотичної.

 Для кривої на декартовій площині, що задана рівнянням y = y(x), кривизна обчислюється по формулі:

\kappa(x) = \frac{|y''|}{(\sqrt{1+y'^2})^3}.

Для того, щоб крива збігалася з деяким відрізком прямої або з усією прямою, необхідно і достатньо, щоб її кривизна (або вектор кривизни) у всіх точках тотожно дорівнювала нулю. Величина, обернена до кривизни кривої (r=1/\kappa), називається **радіусом кривизни**; він збігається з радіусом дотичної кола в даній точці кривої. Центр цього кола називається центром кривизни. ****Якщо кривизна кривої дорівнює нулю, то дотична кола вироджується в пряму.

****