**Тема: Елементи комбінаторики. Алгебра подій, додавання ймовірностей, множення ймовірностей.**

1. **Мотивація навчальної діяльності**

Представникам різних професій доводиться розв'язувати за­дачі, в яких з деякої множини об'єктів потрібно вибирати еле­менти, що мають ті або інші властивості, розміщувати ці еле­менти в певному порядку. Так керівнику цеху потрібно розпо­ділити кілька видів робіт між працівниками, агроному — роз­містити посіви сільськогосподарських культур на кількох по­лях, хіміку — розглянути можливі зв'язки між атомами і моле­кулами тощо. Оскільки в таких задачах йде мова про комбіну­вання об'єктів, їх називають комбінаторними задачами, а розділ математики, в якому вивчаються питання про те, скільки різних комбінацій, що відповідають тим чи іншим умовам можна скла­сти із заданих об'єктів, називається комбінаторикою.

Термін "комбінаторика" походить від латинського слова "combina", що в перекладі на українську означає - "сполучати", "з'єднувати".

В наш час комбінаторні задачі приходиться розв'язувати фізи­кам, хімікам, біологам, економістам, спеціалістам самих різних професій.

Сьогодні ми будемо розглядати перестановки, розміщення, комбінації як комбінаторні конфігурації та їх використання при підрахунку ймовірності події.

1. **Правила суми і добутку вибору елементів**

* Правило суми.

Якщо елемент *a* можна вибрати *m* способами, а елемент *b - n* способами, причому будь-який вибір елемента *a* відрізняється від будь-якого вибору елемента *b*, то вибір "*a* або *b*" можна зробити *m + n* способами.

* Правило добутку.

Якщо елемент *a* можна вибрати *m* способами, а елемент *b - n* способами, причому будь-який вибір елемента *a* відрізняється від будь-якого вибору елемента *b*, то вибір "*a* і *b*" можна зробити *m · n* способами.

***Приклад 1.*** Скількома способами можна скласти різні двозначні числа з чотирьох цифр 1,2,3,4?

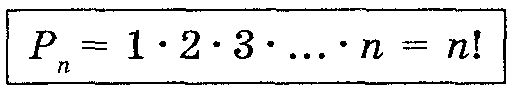
*Розв'язання*

Перша цифра числа вибирається 4 способами з даних цифр, а друга цифра числа вибирається 3 способами (з решти трьох цифр). За правилом добутку 4 · 3 = 12 (способів).

1. **Формули комбінаторики**

* **Перестановки.**

Будь-яка впорядкована множина, яка складається з *n* елементів, називається ***перестановкою*** з *n* елементів і позначається Р*n*.

 Термін "перестановки" вжив вперше Якоб Бернуллі в книзі "Мистецтво припущень".

1! = 1, 0!=1

2! = 2•1 = 2,

3! = 3 •2 •1 = 6,

4! = 4 •3 •2 •1 = 24,

5! = 5 •4 •3 •2 •1 = 120.

***Приклад 2*.** Скількома способами можна скласти розклад одного навчального дня з 6 різних предметів?

*Розв'язання*

P6 = 6! =l · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 = 720.

* **Розміщення.**

Будь-яка впорядкована підмножина з *т* елементів даної множи­ни, яка містить *n* елементів, де *т*  *n* називається ***розміщенням*** *з n* елементів по *т* елементів.

Число розміщень з *n* елементів по *т* позначають символом .



Якщо *п* = *т,* то маємо  = Р*n* тобто перестановка — окре­мий випадок розміщення.

***Приклад 3.*** Обчисліть: a);б); в) ; г) ,.

*Відповіді:* a) 120; 6) 72; в) 5040; г) 720.

***Приклад 4.*** Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри. Скільки різних варіантів потрібно набрати, щоб додзвонитися, якщо абонент пам'ятає, що цифри різні?

*Розв'язання*

=  = 9 · 10 = 90

* **Комбінації.**

Будь-яка підмножина з *т* елементів даної множини, яка містить *n* елементів, називається ***комбінацією*** *з n* елементів по *т* еле­ментів.

Число комбінацій з *n* елементів по *т* позначають символом *.*

Домовилися вважати, що

 = 1,  *=**n* , = 1.

; 

Термін "комбінація" вперше зустрічається у Блеза Паскаля в 1665 році.

***Приклад 5.*** Обчислити a) ; б) *.*

a) ; б) 

***Приклад 6.*** Скількома способами можна скласти з 14 викладачів екзаменаційну комісію з 7 членів?

*Відповідь:*  способами.

1. **Сприймання і усвідомлення матеріалу про використання формул комбінаторики для обчислення ймовірностей подій.**

Безпосередній підрахунок ймовірностей подій значно спро­щується, якщо використовувати формули комбінаторики. Пра­вильність розв'язання задачі залежить від уміння визначити вид сполуки, що утворюються сукупністю подій, про які йдеться мова в умові задачі. Згадаємо алгоритм визначення виду сполуки (таб­лиця 15). Розглянемо приклади розв'язування задач.

***Задача 1.*** В урні лежать 20 кульок, з яких 12 білих, решта — чорні. З урни навмання виймають дві кульки. Яка ймовірність того, що вони білі?

# Розв'язання

Загальна кількість елементарних подій випробування (вий­нято дві кульки) дорівнює числу способів, якими можна вийня­ти 2 кульки із 20, тобто числу комбінацій із 20 елементів по 2 (*n* = ). Підрахуємо кількість елементарних подій, які сприя­ють події «вийнято дві білих кульки». Ця кількість дорівнює числу способів, якими можна вийняти 2 кульки із 12 білих, тобто числу комбінацій із 12 елементів по 2 *(т =* *).*

Отже, якщо подія А — «вийнято дві білі кульки», то



*Відповідь:* ·

***Задача 2.*** В урні лежать 20 кульок, з яких 12 білих, решта — чорні. З урни навмання виймають три кульки. Яка ймовірність того, що серед вибраних дві кульки білі?

# Розв'язання

Загальна кількість елементарних подій випробування (вий­нято три кульки) дорівнює *n =* .

Підрахуємо кількість елементарних подій, які сприяють події «серед трьох вибраних кульок дві білі». Дві білі кульки із 12 білих кульок можна вибрати  способами, а одну чорну куль­ку можна вибрати 8 способами, тоді події «серед трьох вибраних кульок дві білі» сприяють *т =* ·8 елементарних подій.

Отже, якщо подія А — «серед трьох вибраних кульок дві білі», то



*Відповідь:* ·

***Задача 3.*** В урні лежать15 червоних, 9 синіх і 6 зелених кульок однакових на дотик. Навмання виймають 6 кульок. Яка ймо­вірність того, що вийнято: 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних ку­льки?

# Розв'язання

В цій задачі випробування полягає в тому, що із урни вийма­ють 6 кульок. Вийняти шість кульок із 15 + 9 + 6 = 30 кульок можна *n* =  способами. Нас цікавить ймовірність події А — «вийнято 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних кульки». Одну зелену кульку можна вийняти  способами, 2 синіх кульки можна вийняти  способами, 3 червоних кульки можна вийняти  способами. Отже, події А сприяють *т* = ·· елементарних подій. Тоді



*Відповідь:* ***·***

1. **Розв’язання вправ**

1. В урні знаходиться 12 кульок: п'ять білих і сім чорних. На­вмання виймають три кульки. Яка ймовірність того, що се­ред вийнятих кульок:

а) всі три чорні; б) дві чорні і одна біла;

в) одна чорна і дві білі; г) всі три білі?

*Відповіді:* а) ; б) ; в) ; г) .

2. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Яка ймовірність того, що номер набрано правильно?

*Відповідь*: .

3. При грі в «Спортлото» на спеціальній картці відмічається 6 номерів із 49. Під час тиражу визначаються 6 виграшних номерів. Яка ймовірність вгадати рівно 3 виграшних номера?

*Відповідь:* .

4. У ліфт 9-поверхового будинку на першому поверсі зайшли 6 чоловік. Знайдіть ймовірність того, що всі вийдуть на різних поверхах, якщо кожний з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого.

*Відповідь:* ·

5. З 10 лотерейних білетів два виграшних. Знайдіть ймовірність того, що серед узятих будь-яких п'яти білетів: а) один ви­грашний; б) принаймні один виграшний?

*Відповіді:* a) ; б) .

6. 9 пасажирів сідають у 3 вагони. Знайдіть ймовірність того, що: а) у кожний вагон сяде по три пасажири; б) в один з ва­гонів сядуть 4, у другий — Зів третій — 2 пасажири.

*Відповіді:* а) ; б) .

7. Знайдіть ймовірність того, що дні народження 12 чоловік при­падають на різні місяці року.

*Відповідь:* .

8. Гральний кубик підкидають двічі. Знайдіть ймовірність того, що:

а) у сумі випаде 6 очок;

б) у сумі випаде 7 очок;

в) за два кидки випаде однакова кількість очок;

г) за два кидки випаде різна кількість очок.

*Відповіді:* а) ; б) ; в) ; г) .

9. У шаховому турнірі беруть участь 20 чоловік, які жеребкуван­ням розподіляються на дві групи по 10 чоловік. Знайдіть ймо­вірність того, що: 4 найсильніших гравці потраплять по *Відповідь:* *.*

10. В урні *а* білих та *b* чорних кульок *(п  2).* Із урни виймають навмання дві кульки. Знайти ймовірність того, що обидві кульки будуть білими.

*Відповідь:* *.*

11. В урні *а* білих та *b* чорних кульок *(а  2, b >* 3). Із урни вий­мають навмання п'ять кульок. Знайти ймовірність того, що дві з них будуть білими, а три чорними.

*Відповідь:* .

12. В урні, що містить *k* кульок, є *l* білих кульок. Із урни виби­рається навмання *r* кульок. Знайти ймовірність того, що із них рівно s будуть білими.

*Відповідь:* .

13. У класі *k* учнів. Знайдіть ймовірність того, що принаймні два з них народилися в одному місяці.

*Відповіді:* 1 – *,* якщо *k * 12; 1, якщо *k >* 12.

1. **Домашнє завдання.**

Задача 1. У класі 30 учнів. Скількома способами можна виділити для чергування двох осіб, якщо: а) один з них повинен бути старшим; б) старшого бути не повинно?

Задача 2. У хірургічному відділенні працюють 40 лікарів. Скількома способами з них можна утворити бригаду в складі: а) хірурга та асистента; б) хірурга і чотирьох його асистентів?

Задача 3. В ящику лежать 8 білих і 12 червоних однакових на дотик кульок.

а) Навмання вибирають 3 кульки. Яка ймовірність того, що хоч би одна з них буде білою?

б) Навмання вибирається 6 кульок. Яка ймовірність того, що серед них не більше одної білої кульки?

в) Навмання вибирається 5 кульок. Яка ймовірність того, що серед них не менше двох білих кульок?

г) Навмання вибирається 2 кульки. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?

*Відповіді:* а) ; б); в) **;** г) .