**Тема: Задачі, що приводять до поняття похідної.**

**Похідна функції.**

**План**

1. Задачі, що приводять до поняття похідної.
2. Поняття похідної.

Поняття похідної — фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси і явища в при­родничих, соціальних і економічних науках. Вивчення різних процесів (механічного руху, хімічних реакцій, розширення рідини при нагріванні, значення електричного струму та ін.) приводять до необхідності обчислення швидкості зміни різних величин, тобто до поняття похідної.

1. **Задачі, що приводять до поняття похідної.**
   1. Сприймання і усвідомлення поняття миттєвої швидкості прямолінійного руху матеріальної точки

Нехай матеріальна точка *Μ* рухається прямолінійно по зако­ну s = *f(t)* (рис.1).

В момент часу *t0* вона зайняла положення М0 і пройшла шлях *S0 = f(t0)*. Знайдемо швидкість точ­ки в момент часу *t0*.

Припустимо, що за довільно вибраний проміжок часу Δ*t*, по­чинаючи з моменту *t0*, точка перемістилася на відстань Δs і за­йняла положення *М1.* Тоді

*t1* = *t0* + Δ*t*, *s1 = f(t1)* = s0 + Δs.

За проміжок часу Δt матеріальна точка проходить шлях

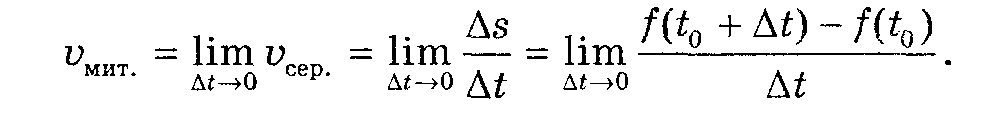
Δs= *f(t1)* *- f(t0)* = *f(t0 +* Δ*t)* - *f(t0)*. Середня швидкість *υ* руху на проміжку *Μ0М1* дорівнює: .

Ця величина дає лише приблизне уявлення про швидкість руху матеріальної точки на розглянутому проміжку. Вона буде більш точніша, якщо проміжок Δt буде зменшуватися.

Таким чином, можна вважати, якщо Δ*t* наближається до нуля, то середня швидкість  буде наближатися до швидкості в момент часу *t0*.

!

*Миттєвою швидкістю* точки, яка рухається прямолінійно, в мо­мент часу *t0* називається границя середньої швидкості при умові, що Δ*t* наближається до нуля.



Числа Δ*t*, Δs називаються відповідно приростом часу, прирос­том шляху.

Отже, миттєвою швидкістю точки, яка рухається прямоліній­но, є границя відношення приросту шляху Δs до відповідного приросту часу Δ*t*, коли приріст часу наближається до нуля.

1.2 Сприймання і усвідомлення поняття дотичної до кривої.

В курсі геометрії ви познайомились з означен­ням дотичної до кола: дотичною до кола нази­вається пряма, яка лежить в площині кола і має з колом лише одну спільну точку. Таке оз­начення дотичної не може бути перенесено на всі криві (парабола, синусоїда, гіпербола тощо).

Наприклад, вісь *ΟΥ* має тільки одну спільну точку з графіком функції *у* = *х3,* проте її не мож­на вважати дотичною до кубічної параболи в точці *0* (рис. 2).

Пряма *у* = 1 і синусоїда *у* = sin*x* мають безліч спільних точок (рис. 3), проте пряму *у* = - 1 вважають дотичною до синусоїди.

Для введення означення дотич­ної до кривої розглянемо функцію *у = f(x)* і її графік — криву лінію (рис. 4). Нехай точки *А і Μ* нале­жать графіку функції *у* = *f(x),* про­ведемо січну *AM.*

Зафіксуємо точку А. Нехай точ­ка *М,* рухаючись по кривій, набли­жається до точки А. При цьому січна *AM* буде повертатися навко­ло точки А і в граничному поло­женні при наближенні точки *М* до точки А січна займе поло­ження прямої АТ. Пряму АТ називають дотичною до даної кри­вої в точці А.

Дотичною АТ до графіка функції *у = f(x)* в точці А називається граничне положення січної *AM,* коли точка *М,* рухаючись по кривій, наближається до точки А.

Слід мати на увазі, що не в уся­кій точці кривої можна провести до неї дотичну. На рис.5 зображено криву у = *f(x),* яка в точці А не має дотичної, бо якщо точка *М* буде на­ближатися до точки А по лівій час­тині кривої, то січна МА займе гра­ничне положення AQ.

Якщо точка *N* буде наближатися по правій частині кривої, то січна *ΝΑ* займе граничне положення *AT.* Одержуємо дві різні прямі AQ і АТ, це означає, що в точці А до даної кривої дотичної не існує.

Поставимо задачу: провести дотичну до графіка функції *у = f(x)* в точці *А(х0; у0*).

Дотична — це пряма, а положення прямої *у= kx* + *b,* яка проходить через точку А(*х0; у0*) визначається кутовим коефіцієнтом прямої *k* = tg α, де α — кут між прямою і додатнім напрямом осі *ОХ* (рис.6).

Отже, провести дотичну до графіка означає знайти число *k.*

Нехай в точці А(*х0; у0*) (рис.7) кривої *у = f(x)* існує дотична, визна­чимо кутовий коефіцієнт дотичної. Для цього:

1) Надамо аргументу *х0* приросту Δ*х*, одержимо нове значення аргументу *х0 +* Δ*х*.

2) Знайдемо відповідний приріст функції: Δ*у* = *f(х0* + Δ*х*) - *f(х0)*

3) Знайдемо відношення . Із трикутника *АМК* маємо: = tg*МАК.* Так як *ΜΑΚ* = φ — куту нахилу січної *AM з* додатним напрямом осі *ОХ,* то  = tg φ.

4) Якщо Δ*х*→0, то Δ*у*→0 і точка М буде переміщуватися по кривій, наближаючись до точки А.

При цьому січна *AM* буде повертатися навколо точки А, а величина кута φ буде змінюватися зі зміною Δ*х*. Граничним положенням січної *AM* при Δ*х→*0 буде дотична АТ, яка утворює з додатним напрямом осі ОХ деякий кут, величину якого позна­чимо через α.

Отже,  *—* кутовий коефіцієнт дотичної.

**2. Поняття похідної**

Нехай задано функцію *у* = *f(x)* на деякому проміжку. Візьмемо довільну внутрішню точку *хо* даного проміжку, надамо значенню *хо* довільного приросту Δ*х* (число Δ*х* може бути як додатним, так і від'ємним), але такого, щоб точка *хо*+Δ*х* належала даному проміжку, тоді

1) Обчислимо в точці *хо* приріст Δу = Δ*f(хо)* функції:

Δу *=* Δ*f(хо)* = *f(xo+* Δ*х) – f(хо);*

2) Складемо відношення: .

3) Знайдемо границю цього відношення при умові, що Δ*х → 0*, тобто:



Якщо дана границя існує, то її називають похідною функції *у = f(x)* в точці *хо* і позначають *f '*(*хо)* або *у'* (читається еф штрих від *хо* або *у* штрих).

**!**

*Похідною* функції *у* = *f(x)* в точці *хо* називається границя відно­шення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто

.

**Функцію, яка має похідну в точці *хо,* називають диферен­ційованою в цій точці.**

Функцію, яка має похідну в кожній точці деякого проміжку, називають диференційованою на цьому проміжку. **Операція знаходження похідної називається диференціюванням.**

***Приклад 1.*** Знайдіть похідну функції *f(x) = Зх2 +* 2 в точці *хо*.

# Розв'язання

Знайдемо приріст функції:

Δ*f* = *f(хо* + Δ*x*) – *f(xo)* = 3(*хо* + Δ*x*)2 + 2 - 3 - 2 =

= 3 *+ бхо*Δ*x+* 3Δ*x*2 + 2 - 3 - 2 = 6*хо*Δ*х*+ 3Δ*x*2 = Δ*x*(6*x*ο + 3Δ*x*).

Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

.

Знайдемо похідну даної функції в точці *х*0:

*f '(хo)* =  = = 6*х*о + 3 · 0 = 6*хо.*

*Відповідь:* 6*хо.*

**Домашнє завдання.**

1. Опрацювати конспект;

2) Знайти похідну функції:

а) *у*=5*х*+4 д) *у*=4 и) *у*=

б) *у*=-2*х* е) *у*= к) *у*=

в) *у*=1-5*х* ж) *у*=2+5*х*



г) *у*=*х* з) *у*=-100