**Тема: Ознаки сталості, зростання та спадання функції.**

**План**

**1. Ознака сталості, зростання, спадання функції.**

**2. Поняття критичної точки.**

**3. Алгоритм дослідження функції на монотонність.**

**1. Ознака сталості, зростання, спадання функції.**

 Відомо, що функція *y = f(x)* називається зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких *х1* і *х2*, що належать проміжку, із умови *х2 >х1* випливає, що *f(x2) > f(x1)*.

Дотична в кожній точці графіка зростаючої функції, як видно з рис.4, утворює з додатним напрямом осі ОХ або гострий кут, або кут, що дорівнює нулю (в останньому випадку дотична паралельна осі ОХ).

Виходячи із геометричного змісту похідної: *tg* α *= f ´(x0),* це означає, що похідна в кожній точці проміжку невід’ємна, тому для зростаючої функції *f(x)* виконується умова: .

Функція *y = f(x)* називається спадною на проміжку, якщо для будь-яких *х1* і *х2*, що належать цьому проміжку, із умови *х2 >х1* випливає, що *f(x2) < f(x1)*. Дотична в кожній точці графіка спадної функції (рис. 5) утворює з віссю *ОХ* або тупий кут, або кут, що дорів­нює нулю, тому для функції *f(x),* яка спадає на деякому проміжку, вико­нується умова *f '(x)* $\leq $*0.*

 На рис. 6 видно також, що одна і та ж функція може на одному про­міжку області її визначення зростати, а на іншому *—* спадати. Характер по­ведінки функції на кожному із цих проміжків визначається знаком її по­хідної.

Отже, наочне уявлення дозволяє сформулювати властивості зроста­ючих та спадних функцій.

Якщо функція *у* = *f(x)* диферен­ційована і зростає на деякому про­міжку, то її похідна на цьому про­міжку невід'ємна.

Якщо функція *у = f(x)* диференційована і спадає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку недодатна.

Проте для розв'язування задач особливо важливими є обернені твердження, які ви­ражають ознаки зростання і спадання функ­ції на проміжку. Доведення цих тверджень розглянути самостійно

**Якщо *f ´(x)*** $>$ **0 на проміжку, то функція *f(x)* зростає на цьому проміжку.**

**Якщо *f ´(x)*** $<$**0 на проміжку, то функція *f(x)* спадає на цьому проміжку.**

Ці два твердження називаються ознака­ми зростання (спадання) функції на про­міжку.

Також існує і ознака сталості функції:

**Якщо *f ´(x)* = 0 в усіх точках проміжку, то функція *f(x)* стала на цьому проміжку.**

Доведення розглянути самостійно.

Теорема 1.(ознака монотонності функції)

Якщо похідна функції в усіх точках проміжку додатна, то функція зростає на цьому проміжку; якщо похідна функції в усіх точках проміжку від’ємна, то функція спадає на цьому проміжку.

Доведення**.**  Нехай *f '(x)* $>$ 0 на інтервалі *(a;b)* і *х1, х2 –* довільні точки цього інтервалу, *х2>х1.* Тоді за формулою Лагранжа *f(x2)-f(x1)= f ´(c)( х2- х1)>0 (х1<c<х2)* , оскільки *f '(с)* $>$ 0  і *х2 - х1 >*0. Тобто *f(x2)*$ >$ *f(x1).* Отже, функція *f(x)*  зростає на проміжку *(a;b)* .

Аналогічно доводиться ознака спадання функції.

Теорема 1.(ознака сталості функції)

Якщо похідна функції в усіх точках проміжку дорівнює нулю, то функція стала на цьому проміжку.

Доведення. Нехай *f '(x)* = 0 на інтервалі *(a;b)* і *х1, х2 –* довільні точки цього інтервалу, *х2>х1.* Тоді за формулою Лагранжа *f(x2)-f(x1)= f ´(c)( х2- х1)=0 (х1<c<х2)* , оскільки *f '(с)* = 0 . Тобто *f(x2)= f(x1).* Отже, функція *f(x)*  стала на проміжку *(a;b)* .

Приклад 1. Знайти проміжки зростання і спадання функції *у=3х2-12х.*

Розв’язання

 *у' =6х-12.* Розв’яжемо нерівність *6х-12>0, х>2.* Якщо на кінцях проміжку зростання або спадання функція неперервна, то їх можна приєднати до цього проміжку. Якщо *х*$\in $*[2;*$+\infty $*),* то функція зростає.

Розв’яжемо нерівність *6х-12<0, х<2.* Якщо *х*$\in $*(-*$\infty $*;2],* то функція спадає.

Відповідь: *х*$\in $*[2;*$+\infty $*)* $\nearrow $*, х*$\in $*(-*$\infty $*;2]↘*

***Звернути увагу на точку 2***

1. **Поняття критичної точки.**

Критичними точками функції називаються внутрішні точки її області визначення, в яких похідна функції дорівнює нулю, або не існує.

Внутрішні точки області визначення – це точки, що належать області визначення разом з деяким своїм околом.

Щоб знайти критичні точки функції, треба розв’язати рівняння: *f '(х) = 0.*

Приклад 2. Знайти критичні точки *f(x)=3x2-x3.*

Розв’язання

*f '(x)=6x-3x2; 6x-3x2=0; 3x(2-x)=0; x=0* або *x=2.*

Відповідь: *х1=0, х2=2.*

1. **Алгоритм дослідження функції на монотонність.**

Для знаходження проміжків зростання і спадання функції потрібно розв’язати нерівності *f ´(x)*$>$*0* і *f ´(x)*$<$*0* на області визначення функції *f(x)*. Оскільки *f ´(x)* теж можна розглядати як функцію від змінної *х*, то для розв’язування цих нерівностей можна використати метод інтервалів, точніше, його узагальнення, що спирається на твердження, яке в курсах математичного аналізу звичайно називають теоремою Дарбу: *точки, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, розбивають область визначення функції f(x) на проміжки, у кожному з яких f ´(x) зберігає сталий знак.*

 Знаходження проміжків зростання та спадання функції можна виконувати за таким планом:

1. Знайти область визначення заданої функції *у = f(x).*

2. Знайти похідну *f '(x).*

3. Знайти критичні точки.

4. Відмітити знайдені точки на області визначення, визначити знак похідної на кожному проміжку.

5. Указати проміжки зростання (*f '(x)* $\geq $0) та спадання функції (*f '(x)*$\leq $0).

Приклад 3. Знайдіть проміжки монотонності функції *у* = *х3 - 3х2.*

# Розв'язання

1*.* Область визначення функції: *D(y)* = *R.*

2*.* Знаходимо похідну *у' = 3х2 -**6х.*

3*.* Знаходимо критичні точки: 3*х2 - 6х = 0, 3х(х - 2)* = 0, *х* = 0 або *х* = 2. Наносимо на координатну пряму (рис. 7) нулі похідної і ви­значаємо знаки похідної на кожному проміжку.

4. *у' > 0* в кожному із проміжків *(-**; 0); (2;* +), отже, функція на цих проміжках зростає.

 *у' < 0* на проміжку (*0; 2),* отже, функція на цьому проміжку спадає.

Враховуючи, що в точках 0 і 2 функція неперервна, отримуємо відповідь.

Відповідь: функція зростає на кожному із проміжків *(-**; 0]; [2;* +), спадає на проміжку *[0; 2].*

Приклад 4. Дослідити функцію $y=x^{3}-9x^{2}+3$ на монотонність.

Розв’язання.

1*.* Область визначення функції: *D(y)* = *R.*

2*.* Знаходимо похідну *у' = 3х2 –**18х.*

**3*.* Знаходимо критичні точки: 3*х2 – 18х= 0, 3х(х – 6)*= 0, *х* = 0 або *х* = 6. Наносимо на координатну пряму (рис. 8) нулі похідної і ви­значаємо знаки похідної на кожному проміжку.

4. *у'* $>$ *0* в кожному із проміжків *(-**; 0); (6;* +), отже, функція на цих проміжках зростає.

 *у'* $<$ *0* на проміжку *(0; 6),* отже, функція на цьому проміжку спадає.

Враховуючи, що в точках 0 і 6 функція неперервна, отримуємо відповідь.

Відповідь: функція зростає на кожному із проміжків *(-**; 0]; [6;* +), спадає на проміжку *[0; 6].*

Приклад 5. Дослідити функцію на монотонність *у=х3-27х*

# Розв'язання

1*.* Область визначення функції: *D(y)* = *R.*

2*.* Знаходимо похідну *у' = 3х2 -**27.*

3*.* Знаходимо критичні точки: 3*х2 - 27 = 0, 3(х - 3)(х+3)* = 0, *х* = -3 або *х* = 3. Наносимо на координатну пряму (рис.9) нулі похідної і ви­значаємо знаки похідної на кожному проміжку.

4. *у' > 0* в кожному із проміжків *(-**; -3); (3;* +), отже, функція на цих проміжках зростає.

 *у' < 0* на проміжку (*-3; 3),* отже, функція на цьому проміжку спадає.

Враховуючи, що в точках -3 і 3 функція неперервна, отримуємо відповідь.

Відповідь: функція зростає на кожному із проміжків *(-**; -3]; [3;* +), спадає на проміжку *[-3; 3].*

 **Домашнє завдання.**

* Вивчити алгоритм дослідження функції на монотонність.
* Диференційоване завдання: довести ознаки монотонності і сталості функції.
* Знайти цікаві сторінки із життя І.Ньютона і Г.Лейбніца.
* Розв’язати № 949(а), 985(б) (Г.Н.Литвиненко. Збірник завдань для атестації з математики учнів 10-11 кл.).