**Тема: Визначник Вронського**

План

1. Поняття лінійно залежних і лінійно незалежних функцій.
2. Поняття визначника Вронського.
3. Дослідження функцій на лінійну залежність.

Література

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник - К.:А.С.К., 2011р. – 648с.

2. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика: Підручник - Д.:

Видавництво Сталкер 2006р.

3. Коваленко І.П. Вища математика: Навч. посібник – К. Вища шк.., 2006. – 343с.

4. [www.mathurok.com](http://www.mathurok.com)

Питання для самоконтролю

1. Що називається лінійно залежними функціями?
2. Які функції називаються лінійно незалежними?
3. Що називається визначником Вронського
4. Як обчислити визначник Вронського?
5. Чому дорівнює визначник Вронського для лінійно залежних функцій?

Завдання для самоконтролю

Вивчити означення.

З’ясувати лінійну залежність чи незалежність функцій 2, *х*, *х4*.

1. **Поняття лінійно залежних і лінійно незалежних функцій.**

**Означення 1.** Функції  називаються лінійно залежними на відрізку  якщо існують не всі рівні нулю сталі  такі, що при всіх 



Якщо ж тотожність справедлива лише , то функції  називаються лінійно незалежними.

***Приклад 1.*** Функції  - лінійно незалежні на будь-якому відрізку **,** тому що вираз  є многочленом ступеню  і має не більш, ніж  дійсних коренів.

***Приклад 2.*** Функції  , де всі - дійсні різні числа - лінійно незалежні.

***Приклад 3.*** Функції  - лінійно незалежні.

Зауваження 1.

Якщо задані дві функції, то їх лінійна залежність рівносильна умові пропорційності цих функцій.

Зауваження 2.

Якщо дві функції лінійно незалежні, то їх відношення буде деяка функція, що не є сталою.

1. **Поняття визначника Вронського.**

Для дослідження системи функцій на лінійну залежність часто використовують визначник Вронського.

**Означення 2.** **Визначник [Вронського](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%AE%D0%B7%D0%B5%D1%84_%D0%92%D1%80%D0%BE%D0%BD%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B8%D0%B9" \o "Юзеф Вронський)** (вронськіан) — [визначник](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B8%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA), складений із функцій та їх [похідних](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D1%85%D1%96%D0%B4%D0%BD%D0%B0). Використовується в [теорії диференціальних рівнянь](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D0%B4%D0%B8%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D1%96%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D1%85_%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%8F%D0%BD%D1%8C" \o "Теорія диференціальних рівнянь).

Для n функцій визначник Вронського будується з використанням похідних до n-1 порядку.

 W = \begin{vmatrix} 
f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\
f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n' (x)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
f_1^{(n-1)}(x)& f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x)
\end{vmatrix},  

Для лінійно залежних функцій визначник Вронського дорівнює нулю.

**Для лінійного диференціального рівняння другого порядку.**

Для однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку у формі

 y'' + g(x)y' + h(x)y = 0 \,

визначник Вронського, складений із лінійно незалежних розв'язків рівняння визначається функцією g(x).

Нехай  y_1(x)  та  y_2 (x)  - два лінійно незалежні розв'яки, тобто

 y_1'' + g(x)y_1' + h(x)y_1 = 0 \,

 y_2'' + g(x)y_2' + h(x)y_2 = 0 \,

Домножаючи перше рівняння на  y_2 (x)  а друге на  y_1 (x)  і віднімаючи отримуємо

 W' +g(x)W = 0 \,

або

 W = C e^{-\int g(x)dx} \, .

Цю властивість можна використати для знаходження другого лінійно незалежного розв'язку рівняння, якщо один вже відомий. Рівняння для другого розв'язку є рівнянням першого, а не другого порядку.

Також з цього видно, що визначник Вронського або ніколи не нуль, або ідентичний нулю.

**Теорема ( достатня умова лінійної незалежності розв’язків).** Якщо розв’язки лінійного однорідного рівняння**http://ua.textreferat.com/images/referats/20427/image017.gif**- лінійно незалежні, то визначник Вронського **http://ua.textreferat.com/images/referats/20427/image021.gif**не дорівнює нулю в жодній точці**http://ua.textreferat.com/images/referats/20427/image004.gif.**

***Приклад 4.*** Переконаємося, що вронськіан лінійно залежних функцій 1,x^2,3+2x^2 дорівнює нулю:


W(f_1,f_2,f_3)(x) = 
\begin{vmatrix}
1 & x^2 & 3+2x^2 \\
0 & 2x & 4x \\
0 & 2 & 4
\end{vmatrix}
= 8x-8x = 0,\qquad x\in\mathbb R.


***Приклад 5.*** Перевіримо тепер лінійну незалежність функцій 1,x,x^3


W(f_1,f_2,f_3)(x) = 
\begin{vmatrix}
1 & x & x^3\\
0 & 1 & 3x^2 \\
0 & 0 & 6x
\end{vmatrix}
= 6x, \qquad x\in\mathbb R.


Є точки, де вронскіан відмінний від нуля (у нашому випадку це будь-яка точка, крім x = 0). Тому на будь-якому проміжку ці функції будуть лінійно незалежними.

***Приклад 6.*** Наведемо тепер приклад, коли вронскіан всюди дорівнює нулю, але функції все одно лінійно незалежні. Задамо дві функції:

f_1(x)=x^2;\qquad f_2(x) =
\begin{cases}
-x^2, &  x < 0, \\
x^2, &  x \geqslant 0.
\end{cases}


Обидві функції всюди диференційовні (у тому числі в нулі, де похідні обох функцій обертаються в нуль). Переконаємося, що вронскіан всюди нуль.


W(f_1,f_2)(x) = 
\begin{cases}
  \begin{vmatrix}
  x^2 & -x^2 \\
  2x & -2x
  \end{vmatrix}
 = 0, &  \; x < 0, \\[15pt]
  \begin{vmatrix}
  x^2 & x^2 \\
  2x & 2x
  \end{vmatrix}
 = 0, &  \; x \ge 0
\end{cases}


Проте ці функції, очевидно, є [лінійно незалежними](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B0_%D0%BD%D0%B5%D0%B7%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D0%B6%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C" \o "Лінійна незалежність). Бачимо що рівність вронскіана нулю не тягне за собою [лінійної залежності](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B0_%D0%B7%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D0%B6%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C" \o "Лінійна залежність) у випадку довільного вибору функцій.