**Тема: Застосування визначеного інтеграла у фізиці та економіці.**

1. Задача про обчислення шляху.
2. Задача про силу тиску рідини.
3. Робота змінної сили.
4. Економічний зміст визначеного інтеграла.
5. Знаходження капіталу за відомими інвестиціями.

1. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно з деякою миттєвою швидкістю . Треба знайти шлях, який пройде тіло за проміжок часу від *t=T1* до *t=T2*.

У найпростішому випадку, якщо миттєва швидкість стала, тобто , то шлях, пройдений тілом, дорівнює (за означенням, відомим з курсу фізики) добутку швидкості на час руху:



У загальному випадку, коли миттєва швидкість не стала, роблять так.

Проміжок часу [*T1; T2*] ділять точками *t0=T1, …, tn-1, tn=T2(t0< t1<…< tn)* на n відрізків [*ti-1*; *ti*], *i=1, 2, …, n,* однакової довжини.

.

Далі, взявши на кожному відрізку [*ti-1; ti*], довільну точку  складають суму

. (1)

Кожний доданок  цієї суми дає наближене значення шляху, пройденого тілом за час від *t=ti-1* до *t=ti*. Отже, шлях, пройдений тілом за час від *t=T1* до *t=T2*, наближено виражається сумою (1).

Легко побачити, що наближення буде тим кращим, чим дрібніші відрізки поділу [*ti-1; ti*], *i=1, 2, …, n.* Тому шлях *s*, пройдений тілом за відрізок часу [*T1; T2*], визначається як границя суми (1) при :



Оскільки остання границя, за означенням, є визначний інтеграл від функції  на відрізку [*T1; T2*], то шлях, пройдений тілом за проміжок часу [*T1; T2*], обчислюють за формулою

 (2)

 Приклад 1. Тіло рухається прямолінійно з швидкістю м/с. Знайти шлях, пройдений тілом за перші 3 с.

Розв’язання. За формулою (2) дістанемо



2. Нехай пластинку у вигляді криволінійної трапеції занурено вертикально в рідину з густиною  так, що її бічні сторони паралельні поверхні рідини і лежать нижче від її рівня відповідно на відстані *a* i *b*. Визначити силу тиску рідини на пластинку.

Якщо пластинка буде в горизонтальному положенні на глибині *h* від поверхні (рівня) рідини, то сила тиску *Р* рідини в ньютонах на горизонтальну пластинку дорівнюватиме вазі стовпа рідини, основа якого – дана пластинка, а висота – глибина *h*, тобто

, (1)

де *S* - площа пластинки.

А якщо пластинку занурено в рідину вертикально, то за формулою (1) тиск рідини на пластинку не можна обчислити, бо в цьому разі тиск рідини на одиницю площі пластинки змінюється із зміною глибини занурення, тобто залежить від відстані пластинки до поверхні рідини.

Розв’язуючи задачу, враховуватимемо те, що за законом Паскаля тиск у рідині передається однаково в усіх напрямках, у тому числі й на вертикальну площадку.

Для розв’язання задачі поділимо пластинку на *n* частин (малих горизонтальних смужок) прямими, які паралельні поверхні рідини (тобто паралельні осі *Оу*) і проходять через точки   , де , *і=0, 1, 2, …, n.*

Виділимо одну із смужок на глибині *хі*. Для досить вузької смужки тиск у всіх її частинах можна вважати наближено однаковим, а саму смужку можна взяти за прямокутник з висотою  і основою, яка дорівнює нижній основі смужки. Легко побачити, що довжина основи прямокутника є функцією від *х.* Позначимо цю функцію через  де . Отже, силу тиску *Рі* на *і*-ту смужку можна обчислити за формулою (1), тобто



Підсумувавши сили тиску на всі смужки, знайдемо наближене значення сили тиску рідини на всю пластинку:



Точність наближеної рівності тим більша, чим коротші відрізки , на які поділено відрізок .

Отже, точне значення сили тиску рідини на пластинку визначають за формулою .

За означенням остання границя – це визначений інтеграл від функції  на відрізку [*a;b*], тому силу тиску рідини на пластинку обчислюють за формулою .

Приклад 1. Акваріум має форму прямокутного паралелепіпеда. Знайти силу тиску води (густина води 1000 кг/м3), яка наповнює акваріум, на одну з його вертикальних стінок, розміри якої 0,4 х 0,7 м.

Розв’язання. Візьмемо систему координат так, щоб осі *Оу* і *Ох* відповідно містила верхню основу і бічну сторону вертикальної стіни акваріума. Щоб знайти силу тиску, скористаємось формулою (2).

Стінка має форму прямокутника, тому . Оскільки межі інтегрування *a=0* i *b=0,4*, то дістанемо

.

Враховуючи, що м/с2 , маємо 

3. Нехай матеріальна точка під дією сили *F* рухається по прямій. Якщо діюча сила стала, а пройдений шлях дорівнює *s*, то, як відомо з курсу фізики, роботу *А* цієї сили *F* обчислюють за формулою

. (1)

Перейдемо тепер до розгляду питання про знаходження роботи змінної сили. Нехай матеріальна точка рухається по осі *Ох* під дією сили, проекція якої на вісь *Ох* - це функція від *х*. Позначимо її через  і припускатимемо, що *f* – неперервна функція. Нехай під дією сили *F* матеріальна точка перемістилась з точки *М(а)* у точку *М(b).* Доведемо, що робота в цьому разі обчислюється за формулою

. (2)

Поділимо відрізок [*a; b*] точками  на *n* частин , однакової довжини . На кожному відрізку  роботу сили можна наближено обчислювати за формулою (1), тобто вважати, що вона дорівнює  де - деяка точка відрізка . Тоді робота сили на відрізку [*a; b*] наближено виражатиметься формулою .

Точність наближення буде тим точнішою, чим коротшими є відрізки , на які поділено відрізок [*a; b*]. Тому, переходячи в останній рівності до границі при , дістаємо

 (3)

Отже, робота змінної сили обчислюється за формулою (3).

Приклад 1. Сила пружності пружини, розтягнутої на 0,05м, дорівнює 3Н. Яку роботу треба виконати, щоб розтягти пружину на ці 0,05м?

Розв’язання. За законом Гука сила F, яка розтягує або стискає пружину, пропорційна цьому розтягу або стиску, тобто , де *х* – величина розтягу або стиску, *k* - коефіцієнт пропорційності. З умови випливає, що , тобто *k=60*, отже, *F=60х*.

Використовуючи формулу (3), дістаємо

(Дж).

Економічний зміст визначеного інтеграла.

Якщо  - продуктивність праці в момент часу , то

- обсяг продукції, що випускається за проміжок часу ;

- обсяг продукції, що випускається за проміжок часу .

Задача. Знайти обсяг продукції, виробленої за чотири роки, якщо продуктивність праці характеризується формулою .

Розв’язання. Скористуємося формулою (6.38). Обсяг виробленої продукції дорівнює:

.

Використаємо метод інтегрування частинами:

 Знаходження капіталу за відомими інвестиціями

Розглянемо задачу знаходження капіталу (основних фондів) за відомими частими інвестиціями . Чисті інвестиції (капіталовкладення)- це загальні інвестиції, які були зроблені за певний проміжок часу, за винятком інвестицій на відшкодування основних фондів (капіталу), які виходять з ладу. Таким чином, за одиницю часу капітал збільшується на суму чистих інвестицій.

Якщо капітал розглядати як функцію часу , а чисті інвестиції, відповідно, як , то викладене вище можна записати у вигляді:

.

Часто вимагається знайти приріст капіталу за період з моменту часу  до , тобто величину . Враховуючи, що  - первісна для функції , маємо:

.

Задача. Чисті інвестиції задано функцією .

Визначити:

а) приріст капіталу за три роки;

б) термін часу (у роках), після якого приріст капіталу складає 50000.

Розв’язок. а) Скористаємося формулою для обчислення , поклавши  поклавши =0; =3.

.

б) Позначимо шукану тривалість часу через Т, тоді

.

Підставляємо  і .







 

# Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити шлях, пройдений тілом при рівномірному русі за інтервал часу від  до ;

а)

б)

2. Сила в 1Н стискає пружину на 1 см. Обчислити роботу при стисканні пружини на 10 см.

3. При розтягуванні пружини на 0, 02 м потрібно прикласти силу в 40Н. Обчислити роботу при стисканні пружини на 0,05м.

4. Знайти середнє значення витрат , виражених в грошових одиницях, якщо обсяг продукції х змінюється від 0 до 3 од. Вказати обсяг продукції, за якого витрати приймають середнє значення.