**Тема: Скалярний добуток векторів. Кут між двома векторами. Векторний добуток, його властивості. Мішаний добуток трьох векторів.**

**Скалярний добуток векторів**

**1)Скалярним добутком** двох векторів, які задано координатами, називається число, що дорівнює сумі добутків відповідних координат.

  Якщо є вектори , то .

**2)Скалярним добутком**векторіві  (позначення: (·), або , або (; ))називається добуток довжин цих векторів на ко­синус кута між ними, тобто · *= |*| · ||cosφ (рис. 1).

***Властивості скалярного добутку***

1. ·= · (переставний закон);
2. 2 = ||2, або || = = ;
3. ( + ) ·  = · + · (розподільний закон);
4. (λ) ·  = λ(·) (сполучний закон).

*Примітка 1.* Косинус кута між ненульовим векторами та виражається формулою , яка випливає з означення скалярного добутку.

*Примітка 2.* Властивість 2 скалярного добутку, а саме фор­мула || = = = *,* дозволяє обчислювати довжину вектора в загальному випадку.

*Примітка 3.* Розподільний закон справджується для будь-якого скінче-нного числа доданків. Наприклад, правильна форму­ла ( +  + ) ·  = · + · + ·.

***Задача 1***. Знайдіть кут між векторами  і .

*Розв’язання*

     Скористаємося формулою

,

;

;

;

тоді .

 Звідси .

*Відповідь*: .

**Ознака перпендикулярності двох векторів.**

Два ненульові вектори тоді і тільки тоді взаємно перпен­дикулярні, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто  **   ·  *=* 0( **, **).

***Задача 2***. При якому значенні *р* вектори  і  взаємно перпендикулярні?

*Розв’язання*

     Два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

, тоді . Звідси *р*=5.

*Відповідь*: *р*=5.

**Векторний добуток векторів**

Упорядкована трійка некомпланарних векторів a, b, c в тривимірному просторі називається правою, якщо з кінця вектора с найкоротший поворот від вектора a до вектора b видно спостерігачеві проти годинникової стрілки. І навпаки, якщо найкоротший поворот видно за годинниковою стрілкою, то трійка називається лівою.

**Векторним добутком** векторів  і  називається [вектор](http://bondarenko.dn.ua/mathematics/vm/vstupni-oznachennya-zmist-ta-vlastivosti-linijnih-operatsij-nad-vektorami/) , який задовольняє наступним умовам:

1. 
2.  утворюють праву трійку векторів (див. рисунок)
3. його модуль чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах  і .



Позначається: ![\vec{c}=\vec{a}\times \vec{b},\;\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]]()

**Властивості векторного добутку:**

1. 
2. 
3. 
4. 
5. Необхідною й достатньою умовою колінеарності двох ненульових векторів є рівність нулю їхнього векторного добутку:

 $⇔$  || 

1. *Площа паралелограма*, побудованого на векторах  і 



 Якщо відомі координати векторів і**,**то їх векторний добуток знаходиться за формулою:

 .

***Задача 3.*** Обчислити площу трикутника з вершинами (1;-1;2), (5;-6;2), (1;3;-1).

Розв’язок: .

, , тоді площа трикутника АВС буде обчислюватися наступним чином:

 ,

## МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

**Мішаним добутком** трьох векторів називається *число*, яке дорівнює векторному добутку , помноженому скалярно на вектор  

Якщо , то



#### **Властивості мішаного добутку**

**1.** Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці його співмножників, тобто**.**

**2.** При перестановці двох сусідніх множників мішаний добуток змінює свій знак на протилежний, тобто .

**3**. Необхідна і достатня умова компланарності трьох векторів**:** = 0 Û вектори   компланарні.

Отже, в координатній формі умова компланарності трьох ненульових векторів має вигляд: =0

4. Якщо  > 0 - трійка векторів  права;

 < 0 - трійка векторів  ліва.

5. Мішаний добуток некомпланарних векторів  дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятому зі знаком плюс, якщо трійка векторів  права, і зі знаком мінус, якщо трійка ліва.

Об’єм чотирикутної піраміди: Об’єм трикутної піраміди:

 

***Задача 4.*** Обчислити мішаний добуток векторів .

Розв’язок :

****

***Задача 5.*** Чи є компланарними вектори* * 

► Три вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю:



*Відповідь*:  вектори компланарні.

**Домашнє завдання**

1. Задані три точки А(1;1;1), В(4;5;-3) і С(2;3;4). Обчислити скалярний добуток векторів  та .
2. Знайдіть векторний добуток векторів:  та .
3. Обчислити мішаний добуток векторів .
4. Знайдіть векторний добуток,  якщо  