**Заняття 16. НЕРІВНОСТІ**

**Лінійні нерівності**

|  |  |
| --- | --- |
| **Означення** | |
| Лінійною називається нерівність виду *ах* > *b* (або, відповідно, *ах* < *b*, *ax* ≥ *b*, *ах* ≤ *b*), де *а* ≠ 0, и *b* ≠ 0 – числа. | |
| Розв’язком нерівності з однією змінною називається множина таких значень змінної, які обертають його в правильну числову нерівність. | |
| 1. Якщо *а*0, то розв’язок нерівності *ах* > *b* має вигляд . 2. Якщо *а*0, то розв’язок нерівності *ах* > *b* має вигляд . 3. Якщо *а* = 0, то нерівність *ах* > *b* приймає вигляд 0*х* > *b*, тобто вона не має розв’язків при *b* ≥ 0 і верна при будь-яких *х*, якщо *b* < 0. | |
| **При розв’язуванні нерівностей використовуються наступні властивості** | |
| **Властивості** | **Приклади** |
| 1. Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу доданок з протилежним знаком, то вийде рівносильна йому нерівність | 4(*у* – 1) + 7 ≤ 1 – 3(*у* + 2);  4*у* – 4 + 7 ≤ 1 – 3*у* – 6;  4*у* + 3*у* ≤ 1 – 6 + 4 – 7. |
| 2. Якщо обидві частини нерівності помножити або розділити на одне й те саме додатне число, то вийде рівносильна йому нерівність | 7*у* ≤ – 8  у ≤ -  -1 |
| 3. Якщо обидві частини нерівності помножити або розділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то вийде рівносильне йому нерівність | – 3*х* + 8 < 2*x* – 2; – 3*x* – 2*x* < – 8 – 2;  – 5*х* < – 10,  *х* > 2, о  2 (2; + ∞) |

**Оцінка суми, різниці, добутка, частки**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. *а* ≤ *х* ≤ *b*  *c* ≤ *y* ≤ *d*  *a* + *с* ≤ *х* + *у* ≤ *b* + *d* | 3. *а* ≤ *х* ≤ *b*  *c* ≤ *y* ≤ *d*  *aс* ≤ *ху* ≤ *bd* | (a > 0);  (c > 0). |
| 2. *а* ≤ *х* ≤ *b*  *c* ≤ *y* ≤ *d*  *a* – *d* ≤ *х* – *у* ≤ *b* – *c* | 4. *а* ≤ *х* ≤ *b*  *c* ≤ *y* ≤ *d* | (a > 0);  (c > 0). |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. Розв’язати нерівність |  |  |
| Розв’язок | (3*z* + 1)3 – 36*z* ≤ (5*z* – 2)2 + 21*z*;  9*z* + 3 – 36*z* ≤ 10*z* – 4 + 21*z*;  9*z* – 36*z* – 10*z* – 21*z* ≤ – 4 – 3;  x | Оскільки чисельник дробу 4 > 0, то  нерівність справедлива при    *х* – 2 > 0; *x* > 2. |
|  |  | Відповідь: (2; + ∞). |
| 2. Розв’язати нерівність | 1) ⎢1 – 3*х* ⎢ < 2. | 1) ⎢4*х* – 1 ⎢ > 1. |
| Розв’язок | – 2 < 1 – 3x < 2; | 4*х* – 1 < – 1 или 4*x* – 1 > 1; 4*x* > 2 |
|  |  |  |

**Системи нерівностей з однією змінною**

|  |  |
| --- | --- |
| **Означення** | **Приклади** |
| Якщо необхідно знайти спільні розв’язки двох і більше нерівностей з однією змінною, це означає розв’язати систему двох або більше нерівностей з однією змінною | – 1  Значення х ∈ є розв’язком  нерівності 4*х* + 4 ≥ 0 і 6 – 4*х* ≥ 0.  Відповідь: . |
| Розв’язком системи називаються такі значення змінної, які є розв’язками відразу всіх нерівностей, що входять в дану систему |
| Розв’язати систему нерівностей з однією змінною – означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає |

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Розв’язати систему нерівностей |  |
| Розв’язок |  |
| Відповідь: ( – 1; 5; 4). | |

|  |  |
| --- | --- |
| 2. Розв’язати подвійну нерівність | – 3 < 2*x* – 1 < 3. |
| Розв’язок  Розв’язком подвійної нерівності є розв’язок системи двох нерівностей. | o o  – 1 2  (– 1; 2)  або  – 3 < 2*x* – 1 < 3;  – 2 < 2*x* < 4; о о  – 1 < *x* < 2. – 1 2 (– 1; 2) |
| : (– 1; 2). | |
| 3. Розв’язати нерівність |  |
| Розв’язок  Розв’язок цієї нерівності зводиться до розв’язування двох систем | о о  2,5 3,5  Розв’язків немає  або  о о  2,5 3,5  (2,5; 3,5) |
| : (2,5; 3,5). | |

**Розв’язування** **квадратних нерівностей**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Означення** | | | | **Приклади** | |
| Нерівність виду *ах*2 + *bx* + *с* > 0 (*ax*2 + *bx* + *с* < 0), где *а*, *b*, *с* – деякі числа, *а* ≠ 0 і *х* – змінна, називається квадратною | | | | а) – 3*х*2 + *х* – 5 < 0;  б) *х*(*х* + 4) ≤ 3, т. к. *х*2 + 4*х* – 3 ≤ 0. | |
| Для розв’язування квадратних нерівностей використовують ескіз графіка функції *у* = *ах*2 + *bx* + *с*,  тобто параболи. | | х  – 1 | | 3*х*2 – 7*х* – 10 ≥ 0  *у* = 3*х*2 – 7*х* – 10 графік – парабола, вітки напрямлені вгору, вісь 0*х* перетинає в точках | |
| Розв’язок будь-якої квадратної нерівності можна звести до одного з шести випадків таблиці | | | | | |
|  | D < 0 | | D = 0 | | D > 0 |
| а > 0 | + +    *х*  *ах*2 + *bx* + *с* > 0: *х* – будь-яке число;  *ах*2 + *bx* + *с* < 0: розв’язків немає | | + +  *х*0 *х*  *ах*2 + *bx* + *с* > 0:  *х* ∈ (– ∞; *х*0) ∪ (*х*0; + ∞);  *ах*2 + *bx* + *с* < 0: розв’язків немає | | + +    *х*1 – *х*2 *х*  *ах*2 + *bx* + *с* > 0:  *х* ∈ (– ∞; *х*1) ∪ (*х*2; + ∞);  *ах*2 + *bx* + *с* < 0: *х* ∈ (*х*1; *х*2). |
|  | D < 0 | | D = 0 | | D > 0 |
| а < 0 | *х*  – –  *ах*2 + *bx* + *с* > 0: розв’язків немає;  *ах*2 + *bx* + *с* < 0: *х* – будь-яке число. | | *х*  – –  *ах*2 + *bx* + *с* > 0: розв’язків немає;  *ах*2 + *bx* + *с* < 0:  *х* ∈ (– ∞; *х*0) ∪ (*х*0; + ∞). | | *х*1  + *х*2  *ах*2 + *bx* + *с* > 0: *х* ∈ (*х*1; *х*2);  *ах*2 + *bx* + *с* < 0:  *х* ∈ (– ∞; *х*1) ∪ (*х*2; + ∞). |
| Розв’язком нерівності *ах*2 + *bx* + *с* > 0 є значення *х*, для яких точки параболи розташовані над віссю 0*х*.  Розв’язком нерівності *ах*2 + *bx* + *с* < 0є значення х, для яких точки параболи розташовані під віссю 0*х*. | | | | | |
| **Алгоритм розв'язування квадратних нерівностей виду *ах*2 + *bx* + *с* >< 0** | | | | | |
| **Розв’язати нерівність** | | | 7*х* + 10 – 3*х*2 ≤ 0. | | |
| 1. Визначаємо напрямок гілок параболи, відповідної функції *у* = *ах*2 + *bx* + *с*.  2. Знаходимо корені квадратного тричлена *ах*2 + *bx* + *с* (розв’язуємо рівняння *ах*2 + *bx* + *с* = 0).  3. Будуємо ескіз графіка функції  *у* = *ах*2 + *bx* + *с*.  4. Вибираємо значення змінної, які відповідають розв’язкам Записуємо відповідь. | | | – 3*х*2 + 7*х* + 10 ≤ 0  1. *а* = – 3; гілки спрямовані вниз  2. 3*х*2 – 7*х* – 10 = 0; D = 169; *х*1 = – 1; *х*2 = .  3.  – 1 +  о о    .  . | | |

**Розв’язування нерівностей методом інтервалів**

|  |  |
| --- | --- |
| Якщо ліва частина нерівності є добутком, а права частина – 0, тобто *f*(*x*) > 0 (*f*(*x*) < 0) і *f*(*x*) = (*x* – *a*)(*x* – *b*) …. (*x* – *c*), де *a*, *b*, *с* – деякі числа, то такі нерівності розв’язують методом інтервалів. | |
| **Алгоритм розв’язування нерівностей методом інтервалів**  1. Знайти ОДЗ функції *у* = *f*(*x*).  2. Знайти нулі функції *у* = *f*(*x*) ( *f*(*x*) = 0).  3. Нанести нулі на ОДЗ.  4. Визначити знаки функції *f(x)* в кожному інтервалі, на які розбивається ОДЗ нулями функції.  5. Записати відповідь. | **Розв’язати нерівність:**  (*х* + 6)(*х* + 1)(*х* – 4) < 0.  1. ОДЗ: *х* ∈ R.  2. Нулі функції: (*х* + 6)(*х* + 1)(*х* – 4) = 0.  *х*1 = – 6; *х*2 = – 1; *х*3 = 4.  3. Нанесемо нулі на ОДЗ:  – + – +  – 6 – 1 4 *х* |
| : ( – ∞; – 6) ∪ ( – 1; 4). |
| Якщо всі множники функції *у* = *f*(*x*) виду (*х* – *а*), тобто лінійні, то знаки на проміжках із ОДЗ можна чередувати справа наліво з «+» на « – ». | |

**Практична частина**

1. Розв’яжіть нерівність:

а) 3(2*х* + 1) – 6 ≤ 2 – 3(1 – 2*х*); б) – 5(1 + 4*х*) – 2*х* ≥ 1 + 2(3 – *х*);



2. Знайдіть множину розв’язків нерівностей:



3. При яких значеннях змінної має зміст вираз:



4. 4. Доведіть нерівності:

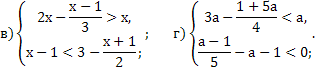
а) (*а* + 1)(*а* – 4) > (*a* + 2)(*a* – 5); б) *а*2 – 2*а* + 9 > 0; в) (*х* – 2)2 > *х*(*х* – 4);

г) *х*2 + 6*х* + *у*2 – 4*у* + 15 > 0; д) 2*х*2 + 5*у*2 + 2*ху* + 1 > 0; е) *х*3 + *у*3 ≥ *х*2*у* + *ху*2. (*х* > 0, *y* > 0).

5. Розв’яжіть подвійні нерівності:



6. Розв’яжіть системи нерівностей:



7. Знайдіть цілі розв’язки системи нерівностей:

